
普通高等教育“十一五”国家级规划教材


新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

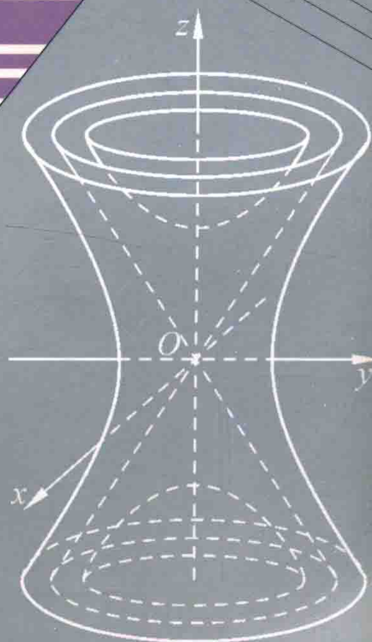
KONGJIAN JIEXI JIHE

高红铸 王敬庚 傅若男 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

空间解析几何

第三版




北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS



普通高等教育“十一五”国家级规划教材



新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

微积分学讲义（第二版）（第一册）

微积分学讲义（第二版）（第二册）

微积分学讲义（第二版）（第三册）

▶ 空间解析几何（第三版）

微分几何讲义

计算方法导引（修订版）

模糊集引论（第二版）（上册）

模糊集引论（第二版）（下册）

概率论基础及其应用（第三版）

测度与概率（第二版）

数学模型与数学建模（第二版）

直观拓扑

泛函分析讲义（第二版）

解析函数论基础（第二版）

ISBN 978-7-303-05171-7



定价：20.00 元

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

北京师范大学数学科学学院 组编

空间解析几何 第三版

KONGJIAN JIEXI JIHE

高红铸 王敬庚 傅若男 编著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS
北京

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何/高红铸,王敬庚,傅若男编著.—北京:北京师范大学出版社,2007.7 重印
ISBN 978-7-303-05171-7

Ⅰ.空… Ⅱ.①高…②王…③傅… Ⅲ.空间解析几何·高等学校:师范院校 Ⅳ.I182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 35279 号

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码:100875
出 版 人:杨 耕
印 刷:唐山市润丰印务有限公司
经 销:全国新华书店
开 本:170 mm×230 mm
印 张:13.5
字 数:225 千字
印 数:1～3 000
版 次:2007 年 7 月第 3 版
印 次:2007 年 7 月第 1 次印刷
定 价:20.00 元

责任编辑:王松浦 装帧设计:李 强
责任校对:李 菡 责任印制:董本刚

前　言

本书是在王敬庚、傅若男编著的《空间解析几何》的基础上修订而成的.与前一个版本比较，主要改写了第四章关于一般二次曲线(面)的内容，并且把原来的附录改写扩充成第五章平面仿射变换和等距变换.

空间解析几何是数学系一年级学生的一门基础课，它为学生学习后继的数学和物理课程提供必要的基础知识.同时，它本身的内容对解决某些实际问题也很有用.

本书包括解析几何产生的一个简单历史概述以及五章，书末附有部分习题的答案.

让学生知道一点有关一门课程的创立历史，有助于学生掌握该课程的基本思想和它在整个数学中所处的地位.为此本书将解析几何产生的历史概述放在最前面供学生阅读.

第一章是向量代数.在本章中暂不引进坐标系，目的是为了让学生更好地掌握向量本身的运算.强调向量的各种运算的几何意义和在几何中的应用.这种着重对“形”的思考的安排，有利于培养学生的几何直观能力.

第二章是平面与直线.首先建立空间坐标系，用坐标进行向量运算，然后运用向量和坐标两种方法，研究有关平面和空间直线的问题.

第三章是特殊曲面和二次曲面.介绍球面、直圆柱面、直圆锥面等常见的特殊曲面.应用曲线族产生曲面的理论，讲解建立一般柱面、锥面和旋转曲面的方法.对椭球面等五种常见二次曲面的标准方程，分析讨论它们表示的空间图形的几何形状.为了提高学生对空间图形的直观想象力，本章还特别介绍了几个区域围成的空间区域简图的画法，这也是学习重积分计算所需要的.

第四章是坐标变换与一般二次曲线(面)的讨论.与上一版本比较，新版本更多地采用了代数中的矩阵、特征值和特征向量的语言来描述坐标变换和二次曲线(面)方程的化简.这种处理方式比回避特征值和特征向量的方式增加了些许难度，但方法上更具有一般性.更重要的是，我们认为这部分内容最能体现几何与代数的完美结合，同时也希望借此向学生传递这样一个观念：即几何与代数在很多情况下描述的是事物的同一个性质，只不过所使用的语

言不同而已.

第五章介绍平面仿射变换和等距变换. 由于这些概念是不依赖于坐标系的几何概念，我们在本版本中采用了由几何方式引入仿射变换的定义，进而推导出在坐标系中的代数表示. 这部分内容的编写参考了尤承业编著的《解析几何》一书. 本版本保留了上一版本中仿射坐标系及图形仿射性质的应用一节，这部分内容对扩展和指导中学几何学的理解很有意义.

书末附有大部分计算题的答案，方便学生及时发现和纠正自己的错误.

我们在编写本书时，努力遵循以下几点：内容力求简明，突出解析几何的基本思想和基本方法；注意强调各种代数表达式的几何意义，着重从几何直观上进行分析；强调几何与代数的联系；每节后的习题与本节内容紧密联系，习题的选配既注意基本题，又有综合和提高题.

本书曾在北京师范大学数学科学学院近年来的教学中多次使用过. 每周四学时讲授，一学期可以完成.

在编写过程中，我们参考了朱鼎勋、陈绍菱编著的《空间解析几何学》，苏步青等的《空间解析几何》，波格列洛夫的《解析几何》，邱维声的《解析几何》，尤承业的《解析几何》等书，谨向各书的著译者表示感谢.

我们还要感谢北京师范大学出版社和北京师范大学数学科学学院对本教材出版的资助. 出版社王松浦编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动，我们对她表示由衷的谢意.

由于编者的水平所限，书中的缺点错误在所难免，欢迎大家批评指正.

编者 2007 年 4 月于北京师范大学

目　录

阅读材料

解析几何创立的历史概述及这门课程的重要性 …………………… (1)

第一章　向量代数 …………………… (8)

§1　向量及其线性运算 …………………… (8)

1. 向量及其表示 …………………… (8)

2. 向量的加法和减法 …………………… (9)

3. 向量的数乘 …………………… (11)

4. 共线及共面向量的判定 …………………… (13)

5. 线段的定比分点 …………………… (14)

习题一 …………………… (15)

§2　向量的内积 …………………… (17)

1. 向量的夹角 …………………… (17)

2. 向量的射影 …………………… (17)

3. 向量的内积 …………………… (18)

习题二 …………………… (21)

§3　向量的外积 …………………… (22)

1. 外积的定义 …………………… (22)

2. 外积的性质 …………………… (24)

3. 外积的应用举例 …………………… (26)

习题三 …………………… (28)

§4　混合积和双重外积 …………………… (29)

1. 向量的混合积 …………………… (29)

2. 向量的双重外积 …………………… (31)

习题四 …………………… (33)

第二章　平面与直线 …………………… (34)

§5　直角坐标系、仿射坐标系以及直角坐标系中的向量计算 …… (34)

1. 直角坐标系和仿射坐标系 …………………… (34)

2. 直角坐标系中的向量运算 …………………… (36)

3. 距离公式和定比分点公式 …… (38)
习题五 …… (41)
§6 平面方程 …… (42)
习题六 …… (48)
§7 空间直线方程 …… (49)
习题七 …… (53)
§8 平面与直线的有关问题 …… (54)
1. 直线与平面的位置关系 …… (54)
2. 二直线共面的条件 …… (57)
3. 平面束 …… (60)
习题八 …… (62)
§9 距　　离 …… (64)
1. 点到平面的距离 …… (64)
2. 点到直线的距离 …… (68)
3. 二异面直线间的距离及公垂线方程 …… (68)
习题九 …… (72)
第三章 特殊曲面和二次曲面 …… (74)
§10 曲面与方程 球面、直圆柱面和直圆锥面的方程 …… (74)
1. 曲面与方程 …… (74)
2. 球面方程 …… (75)
3. 直圆柱面方程 …… (77)
4. 直圆锥面方程 …… (78)
习题十 …… (79)
§11 曲线族产生曲面的理论 柱面、锥面及旋转曲面的方程 …… (81)
1. 曲线族产生曲面的理论 …… (81)
2. 柱面 …… (83)
3. 锥面 …… (86)
4. 旋转曲面 …… (90)
习题十一 …… (95)
§12 空间曲线和曲面的参数方程 …… (98)
1. 空间曲线的参数方程 …… (98)
2. 曲面的参数方程 …… (100)
3. 球面坐标和柱面坐标 …… (103)

习题十二 …………………………………………………………………… (105)
§13　二次曲面 ……………………………………………………………… (108)
1. 椭球面(或椭圆面) ……………………………………………………… (108)
2. 虚椭球面 ………………………………………………………………… (110)
3. 单叶双曲面 ……………………………………………………………… (110)
4. 双叶双曲面 ……………………………………………………………… (111)
5. 双曲面的渐近锥面 ……………………………………………………… (112)
6. 椭圆抛物面 ……………………………………………………………… (114)
7. 双曲抛物面 ……………………………………………………………… (114)
8. 二次曲面标准方程小结 ………………………………………………… (116)
习题十三 …………………………………………………………………… (120)
§14　单叶双曲面和双曲抛物面的直纹性 …………………………………… (122)
1. 单叶双曲面的直纹性 …………………………………………………… (123)
2. 双曲抛物面的直纹性 …………………………………………………… (126)
习题十四 …………………………………………………………………… (127)
§15　空间区域简图 …………………………………………………………… (128)
习题十五 …………………………………………………………………… (132)
第四章　坐标变换与一般二次曲线(面)的讨论 ………………………… (133)
§16　正交矩阵　矩阵的特征值与特征向量　相似矩阵 ………………… (133)
1. 正交矩阵 ………………………………………………………………… (133)
2. 方阵的特征值与特征向量 ……………………………………………… (134)
3. 相似矩阵 ………………………………………………………………… (135)
习题十六 …………………………………………………………………… (138)
§17　坐标变换 ………………………………………………………………… (138)
1. 平面坐标变换 …………………………………………………………… (138)
2. 空间坐标变换 …………………………………………………………… (143)
习题十七 …………………………………………………………………… (145)
§18　一般二次曲线与二次曲面方程的化简 ………………………………… (147)
1. 一般二次曲线方程的化简 ……………………………………………… (147)
2. 一般二次曲面方程的化简 ……………………………………………… (150)
习题十八 …………………………………………………………………… (153)
§19　二次曲线的不变量及类型判别 ………………………………………… (154)
1. 二次曲线的不变量和半不变量 ………………………………………… (154)

2. 利用不变量确定二次曲线的类型 …………………………… (157)
习题十九 …………………………………………………… (161)
§20 二次曲线的切线、法线和对称性 …………………………… (162)
1. 二次曲线和直线的相关位置，切线法线和渐近方向 ……… (162)
2. 二次曲线的对称中心 ……………………………………… (164)
3. 二次曲线的对称轴 ………………………………………… (165)
习题二十 …………………………………………………… (169)
第五章 平面的仿射变换与等距变换 ………………………… (171)
§21 仿射变换与等距变换 …………………………………… (171)
1. 变换与变换群 …………………………………………… (171)
2. 平面的仿射变换 ………………………………………… (173)
3. 平面的等距变换 ………………………………………… (174)
习题二十一 ………………………………………………… (175)
§22 仿射变换的决定定理 …………………………………… (176)
1. 仿射变换诱导的向量变换 ……………………………… (176)
2. 平面仿射变换的决定定理 ……………………………… (177)
习题二十二 ………………………………………………… (178)
§23 仿射变换与等距变换在坐标系中的表示 ……………… (179)
1. 仿射变换在坐标系中的表示 …………………………… (179)
2. 等距变换在坐标系中的表示 …………………………… (180)
习题二十三 ………………………………………………… (182)
§24 仿射变换的其他性质 …………………………………… (183)
1. 仿射变换的面积系数 …………………………………… (183)
2. 仿射变换的不动点和不变直线 ………………………… (184)
3. 二次曲线的仿射等价 …………………………………… (186)
习题二十四 ………………………………………………… (186)
§25 仿射坐标系及图形仿射性质的应用 …………………… (187)
1. 仿射坐标系的应用举例 ………………………………… (187)
2. 图形的仿射性质在初等几何中的应用 ………………… (191)
习题二十五 ………………………………………………… (193)
部分习题答案 ……………………………………………… (195)

阅读材料

解析几何创立的历史概述及这门课程的重要性[①]

一、费马和笛卡儿在创立解析几何中的贡献

费马(Fermat,1601—1665,法国人)和笛卡儿(Descartes,1596—1650,法国人)是17世纪的伟大数学家.由于他们既关心曲线研究中的一般方法,又直接从事科学研究工作,敏锐地看到数量方法的必要性,而且注意到代数具有提供这种方法的力量,因此他们就用代数来研究几何.他们所创立的学科叫做坐标几何或解析几何,其中心思想是把代数方程和曲线、曲面联系起来,这个创造是数学中最丰富、最有效的设想之一.

一句话,科学的需要和对方法论的兴趣,推动了费马和笛卡儿对坐标几何的研究.

费马,出身于商人家庭,学法律并以律师为职业,数学只是他的业余爱好.虽然,他只能利用闲暇时间研究数学,但他对数论和微积分学作出了第一流的贡献,并同帕斯卡(Pascal,1623—1662,法国人)一起开创了概率论的研究工作.他与笛卡儿都是坐标几何的发明者.

费马关于曲线的工作,是从研究古希腊几何学家特别是阿波罗尼奥斯(Apollonius,公元前266—公元前190,古希腊数学家)开始的.阿波罗尼奥斯的《论平面轨迹》一书久已失传,而费马是把它重新写出来的人之一.他用代数来研究曲线,他说,他打算发起一个关于轨迹的一般研究,这种研究是古希腊人没有做到的.1629年他写了一本《平面和立体的轨迹引论》(1679年发表),书中说,他找到了一个研究有关曲线问题的普遍方法.

我们不知道费马的坐标几何究竟怎样产生的,但很可能是他把阿波罗尼奥斯的结果,直接翻译成代数的形式.他考虑任意曲线和它上面的一般点J(如

① 取材于〔美〕克莱因著《古今数学思想》(上海科学技术出版社)中译本第二册第十五章P1~27.

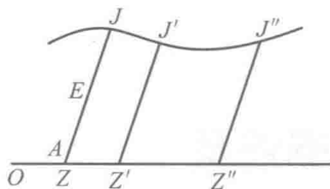


图 1

图1)，J 的位置用 A,E 两个字母定出：A 是从点 O 沿底线到点 Z 的距离，E 是从 Z 到 J 的距离. 他所用的坐标，就是我们现在的斜角坐标，但是 y 轴没有明确出现，而且不用负数，他的 A,E 就是我们现在的 x,y.

费马把他的一般原理叙述为："只要在最后的方程里出现两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线."图1中对不同位置的 E，其末端 $J,J',J''\cdots$ 就把"线"描出，他的未知量 A 和 E，实际是变数，或者可以说，联系 A 和 E 的方程是不定的. 他写出联系 A,E 的各种方程，并指明它们所描绘的曲线. 例如：他给出方程(用我们现在的写法就是) $dx=by$，并指出这代表一条直线；他又给出 $d(a-x)=by$，并指出它也表示一条直线；方程 $p^2-x^2=y^2$ 代表一个圆；$a^2-x^2=ky^2$ 代表一个椭圆；$a^2+x^2=ky^2$ 和 $xy=a$ 各代表一条双曲线；$x^2=ay$ 代表一条抛物线. 而且费马确实领悟到坐标轴可以平移和旋转，因为他给出了一些较复杂的二次方程，并给出了他们可以简化到的简单形式. 他肯定地得到如下结论：一个联系着 A,E 的方程，如果是一次的就代表直线，如果是二次的就代表圆锥曲线.

笛卡儿，首先是一位杰出的近代哲学家，另外他还是近代生物学的奠基人，第一流的物理学家，同时也是一位数学家. 他的父亲是一位相当富有的律师. 笛卡儿大学毕业后去巴黎当律师，在那里他花了一年的时间，跟两位神甫一起研究数学. 其后的9年中，他曾在几个军队中服役，但他一直继续研究数学. 在荷兰布莱达地方的招贴牌上有一个挑战性的数学问题，被他解决了，这使他自信有数学才能，从而开始认真用心于数学. 回到巴黎后，他为望远镜的威力所激动，又一心钻研光学仪器的理论和构造. 1628年，他32岁时移居荷兰，得到较为安静自由的学术环境，在那里他住了20年，写出了著名的作品. 1649年他被邀请去做瑞典女皇的教师，第二年在那里患肺炎逝世，享年54岁.

1637年笛卡儿写的《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》一书出版，这是一本文学和哲学的经典著作，包括三个著名的附录：《几何》、《折光》和《陨星》.《几何》是他所写的唯一的一本数学书，他关于坐标几何的思想，就包括在他的这本《几何》中. 笛卡儿的其他著作有《思想的指导法则》、《世界体系》、《哲学原理》、《音乐概要》.

笛卡儿是通过三个途径来研究数学的：作为一位哲学家，他把数学方法看作是在一切领域建立真理的方法来研究；作为自然科学的研究者，他广泛地研究了力学、水静力学、光学和生物学等各个方面，他的《几何》的一部分和《折光》

都是讲光学的；作为一位关心科学的用途的人，他强调把科学成果付之应用，这一点上，他同希腊人明白地公开决裂．由于他注意到数学的力量，他就要去寻找数学的用途．他不推崇纯粹数学，他说：“我决心放弃那个仅仅是抽象的几何．这就是说，不再去考虑那些仅仅是用来训练思想的问题．我这样做，是为了研究另一种几何，即目的在于解释自然现象的几何．”对他来说，数学不是思维的训练，而是一门建设性的有用科学．

笛卡儿对当时几何和代数的研究方法进行了分析和比较，他认为，没有任何东西比几何图形更容易印入人的脑际了，因此，用这种方式表达事物是非常有益的．但他对欧几里得几何中的每一个证明都要求某种新的往往是奇巧的想法这一点深感不安，他还批评希腊人的几何过多地依赖于图形．他完全看到了代数的力量，看到它在提供广泛的方法论方面，高出希腊人的几何方法；他同时强调代数的一般性，以及它把推理程序机械化和把解题工作量减小的价值．他看到代数具有作为一门普遍的科学方法的潜力，但他对当时通行的代数也加以批评，说它完全受公式和法则的控制，不像一门改进思想的科学，因此他主张采取代数和几何中一切最好的东西，互相以长补短．他所做的工作，就是把代数用到几何上去，在这里，他对方法的普遍兴趣和他对代数的专门知识，就组成了联合力量，于是就产生了他的《几何》一书．

在《几何》中，他开始仿照韦达（Vieta，1540—1603，法国人）的方法，用代数解决几何作图题，后来才逐渐出现了用方程表示曲线的思想．

举两个例子．

假定某个几何问题，归结到寻求一个未知长度 x，经过代数运算，知道 x 满足方程 $x^2=ax+b^2$，其中 a,b 是已知长度．于是，由代数学得到

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2} \qquad ①$$

（笛卡儿不考虑负根）．他画出 x 如下：

作 $\mathrm{Rt}\triangle NLM$（如图 2），其中 $LM=b$，$NL=\frac{a}{2}$．延长 MN 到 O，使 $NO=NL=\frac{a}{2}$，于是 OM 的长度就是 x．

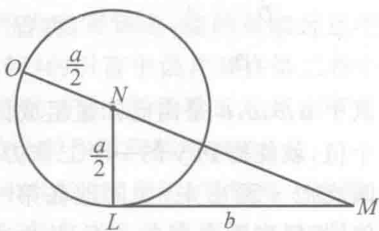


图　2

这就是说，由解一个代数方程而得到的①式指明了 x 的画法．

在《几何》第一卷的前一半中，笛卡儿用代数解决的只是古典的几何作图题，这只不过是代数在几何上的一个应用，并不是现代意义下的解析几何．

下一步，笛卡儿考虑了不确定的问题，其结果有很多长度可以作为答案，这些长度的端点充满一条曲线. 他说“也要求发现并描出这条包括所有端点的曲线”. 曲线的描出，是根据最后得到的不定方程，笛卡儿指出，对于每个 x，长度 y 满足一个确定的方程，因而可以画出 y.

笛卡儿以帕普斯(Pappus，约公元 300—350 年前后，古希腊人)问题为例.

帕普斯问题　在平面上给定三条直线，求所有这样的点的位置(即轨迹)：从这点作三条直线各与一条已知线交成一个已知角(三个角不一定相同)，使在所得的三条线段中，某两条的乘积(指长度的乘积)与第三条的平方成正比.

如果给定四条直线，画法同上，但要求所得的四条线段中，某两条的乘积与其余两条的乘积成正比.

如果给定五条直线，画法仍同上，但要求在所得的五条线段中，某三条的乘积与其余两条的乘积成正比.

如果给定的直线多于五条，以此类推.

帕普斯曾经断言，当给定的直线是三条或四条时，所得的轨迹是一条圆锥曲线.

在《几何》第二卷中，笛卡儿处理了四条直线时的帕普斯问题.

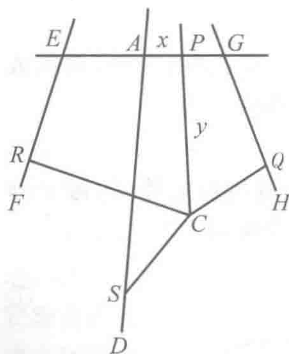


图　3

设给定的直线是 AG, GH, EF 和 AD(如图 3). 考虑一点 C，从 C 引四条直线各与一条已知直线交成已知角(四个角不一定相同)，把所得的四条线段记为 CP, CQ, CR, CS，要求找出满足条件 $CP \cdot CR = CQ \cdot CS$ 的点 C 的轨迹.

笛卡儿记 AP 为 x，记 PC 为 y，经过简单的几何考虑，他从已知量得出 CR, CQ, CS 的值，把这三个值代入 $CP \cdot CR = CQ \cdot CS$，就得到一个 x 和 y 的二次方程

$$y^2 = ay + bxy + cx + dx^2, \qquad ②$$

其中 a, b, c, d 是由已知量组成的简单的代数式. 于是他指出，如果任意给 x 一个值，就能得到 y 的一个二次方程，从这个方程可以解出 y，于是就能用直尺和圆规把 y 画出来，如同他在第一卷所做的. 由此可知，如果我们取无穷多个 x 值，就得到无穷多个 y 值，从而得无穷多个 C 点. 所有这些 C 点组成的轨迹，就是方程②所代表的曲线.

笛卡儿的做法是，选定一条直线(如图 3 中的 AG)作为基线，以点 A 为原点. x 值是基线上从 A 量起一个线段的长度，y 是由基线出发与基线作成一个

固定角度的一个线段的长度.这个坐标系我们现在叫做斜角坐标系.笛卡儿的 x,y 只取正值,即图形只在第一象限内.

有了曲线方程的思想之后,笛卡儿进一步发展了他的思想.

1. 曲线的次数与坐标轴的选择无关.

2. 同一坐标系中两个曲线的方程联立,可解出交点.

3. 曲线概念的推广.古希腊人说平面曲线是可以用直尺和圆规画出的曲线,而笛卡儿则排斥了这种认为只有能用直尺和圆规画出的曲线才是合法的思想.他提出,那些可用一个唯一的含 x 和 y 的有限次代数方程表示出的曲线,都是几何曲线,例如蔓叶线($x^3+y^3-3axy=0$)和蚌线都被承认是几何曲线;其他如螺线等,笛卡儿称之为机械曲线(莱布尼茨(Leibniz,1646—1716,德国人)后来把它们分别称之为代数曲线和超越曲线).笛卡儿对曲线概念的这一推广,取消了曲线是否存在要看它是否可以用圆规和直尺画出这个判别标准,不但接纳了以前被排斥的曲线,而且开辟了整个的曲线领域,牛顿(Newton,1642—1727,英国人)1707 年称这是"把所有可以用方程表示的线都接收到几何里".

从上面的叙述中我们可以看出,费马和笛卡儿两人各自都研究了坐标几何,但他们研究的目的和方法却有明显的不同:费马着眼于继承古希腊的思想,认为自己的工作是重新表述了阿波罗尼奥斯的工作;而笛卡儿批评了希腊人的传统,主张和这个传统决裂.虽然用方程表示曲线,在费马的工作中比在笛卡儿的工作中更为明显,但应该说真正发现代数方法的威力的是笛卡儿.

由于种种原因,使坐标几何的思想——用代数方程表示并研究曲线,在当时没有很快地被数学家们热情地接受并利用.

一个原因是因为费马的书《轨迹引论》到 1679 年才出版,而笛卡儿的《几何》中对几何作图题的强调,遮蔽了方程和曲线的主要思想.事实上,许多和笛卡儿同时代的人,都认为坐标几何主要是解决作图问题的工具,甚至莱布尼茨也说笛卡儿的工作是退回到古代.虽然笛卡儿本人确实知道,他的贡献远远不限于提供一个解决作图问题的新方法,他在《几何》的引言中说,"我在第二卷中所作的关于曲线性质的讨论,以及考查这些性质的方法,据我看远远超出了普通几何的论述",但他利用曲线方程之处,确实被他的作图问题所遮盖.

坐标几何传播速度缓慢的另一个原因是笛卡儿的书《几何》写得使人难懂.他说欧洲几乎没有一个数学家能读懂他的著作,书中许多模糊不清之处,是他故意搞的,他只约略指出作图法和证法,而留给别人去填入细节.他在一封信中把他的工作比作建筑师的工作,只是定出计划,指明什么是应该做的,而把手工操作留给木工和瓦工.他还说:"我没有做过任何不经心的删节,但我预见到,对

于那些自命为无所不知的人，我如果写得使他们能充分理解，他们将不失机会地说我所写的都是他们已经知道的东西.”还有另一方面的理由，在《几何》中他说，他不愿意夺去读者们自己进行加工的乐趣. 的确，他的思想必须从他的书中许多解出的例题里去推测. 他说，他之所以删去绝大多数定理的证明，是因为如果有人不嫌麻烦而去系统地考查这些例题，一般定理的证明就成为显然的了，而且照这样去学习是更为有益的.

影响坐标几何被迅速接受的原因，还有一个是许多数学家反对把代数和几何结合起来，认为数量运算和几何量的运算要加以区别而不能混淆.

再一个原因是当时代数被认为是缺乏严密性的.

上述种种原因，虽然阻碍了对笛卡儿和费马的贡献的了解，但也有很多人逐渐采用并扩展了坐标几何.

二、解析几何的重要性

解析几何出现以前，代数已经有了相当大的进展，因此解析几何不是一个巨大的技术成就，但在方法论上却是一个了不起的创见.

1. 笛卡儿希望通过解析几何给几何引进一个新的方法，他的成就远远超过他的希望，在代数的帮助下，不但能迅速地证明关于曲线的某些事实，而且这个探索问题的方式，几乎成为自动的了. 这套研究方法甚至是更为有力的，当用字母表示正数、负数，甚至以后代表复数时，就有了可能把综合几何中必须分别处理的情形，用代数统一处理了. 例如，综合几何中证明三角形的高交于一点时，必须分别考虑交点在三角形内和三角形外，而用解析几何证明时，则不加区别.

2. 解析几何把代数和几何结合起来，把数学造成一个双面的工具. 一方面，几何概念可以用代数表示，几何的目的通过代数来达到；而另一方面，给代数概念以几何解释，可以直观地掌握这些概念的意义，又可以得到启发去提出新的结论(例如笛卡儿就提出了用抛物线和圆的交点来求三次和四次方程的实根的著名方法). 拉格朗日(Lagrange，1736—1813，法国人)曾把这些优点写进他的《数学概要》中：“只要代数同几何分道扬镳，它们的进展就缓慢，它们的应用就狭窄，但是当这两门科学结成伴侣时，它们就互相吸取新鲜的活力，从那以后，就以快速的步伐走向完善.”的确，17 世纪以来数学的巨大发展，在很大程度上应归功于解析几何，可以说微分学和积分学如果没有解析几何的预先发展是难以想象的.

3. 解析几何的显著优点在于它是数量的工具. 这个数量的工具是科学的发展久已迫切需要，17 世纪一直公开要求着的. 例如当开普勒发现行星沿椭圆轨

道绕着太阳运动，伽利略发现抛出去的石子沿着抛物线轨道飞出去时，就必须计算这些椭圆、计算炮弹飞驶时所画的抛物线了，这些都要求提供数量的工具．研究物理世界，似乎首先需求几何，物体基本上是几何的形象，运动物体的路线是曲线，研究它们时都需要数量知识，而解析几何能使人们把形象和路线表示为代数形式，从而导出数量知识．

三、一点启示

解析几何的重要性在于它的方法——建立坐标系，用方程来表示曲线，通过研究方程来研究曲线．

前苏联著名几何学家波格列诺夫在他所编的《解析几何》前言中说："解析几何没有严格确定的内容，对它来说，决定性的因素，不是研究对象，而是方法．""这个方法的实质，在于用某种标准的方式把方程（方程组）同几何对象（即图形）相对应，使得图形的几何关系在其方程的性质中表现出来．"

由于解析几何方法解决各类问题的普遍性，它已经成为几何研究中的一个基本方法．不仅如此，它还被广泛应用于其他精确的自然科学领域（如力学和物理学）之中．

因此我们学习解析几何，主要是掌握它的基本方法，而不仅仅在于记住它的某些具体结论．

解析几何的基本方法，包括两个方面：一是从图形到方程；二是从方程到图形．也就是选择合适的坐标系，建立图形的方程；通过对方程的研究得到图形的性质，了解图形的形状．

解析几何离不开代数，但又要随时把各种代数表示的几何含义放在心中．学习中要特别注意培养自己的几何直观能力，这种能力对于数学的学习是极为重要的．

应用解析几何的方法，可以研究很多具体的对象．因为我们把目的放在掌握基本方法上，因此，我们的教材采取"研究对象简单一些，突出基本方法"的编写方针，避免发生因为研究对象复杂，引起很多枝节，从而淹没了基本方法的现象，这也是笛卡儿留给我们的一个教训，他就是因为讲了很多的作图题，把他关于解析几何的基本思想淹没了．

第一章 向量代数

为了把代数运算引进到几何的研究中来，这就要求将空间结构代数化. 我们先通过向量，引进向量的代数运算，然后再转成坐标表示. 向量是数学的基本概念之一，在空间解析几何中，研究平面和空间直线，向量是个很有用的工具. 不仅如此，向量在数学的其他分支以及在力学、物理学和许多工程技术科学中，都很有用. 本章中我们用直观的方法引进向量，讨论向量的各种代数运算及其规律，并直接用向量解决各种几何问题. 学习本章时要特别注意向量与数量的区别，向量的各种运算的几何意义，以及它们在解决各种几何问题(如证明共面、共线、平行、垂直和计算长度、角度、面积、体积等几何量)中的作用.

§1 向量及其线性运算

1. 向量及其表示

我们把只有大小的量称为**数量**，例如时间、温度、长度等；把既有大小又有方向的量称为**向量**(或**矢量**)，例如位移、速度、加速度、力等.

向量概念中包含两个要素——大小和方向，而几何中的有向线段正好具备这两个要素，因此很自然地，我们用有向线段来表示向量. 有向线段 $\overline{AB}$ 所表示的向量，其大小就是有向线段 $\overline{AB}$ 的长度，其方向就是有向线段 $\overline{AB}$ 的方向，即从 A 到 B 的方向，这个向量记为 $\overrightarrow{AB}$，A 叫做**向量的起点**(或**始点**)，B 叫做**向量的终点**(如图 1-1).

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的大小，即有向线段的长度，叫做**向量的模**，记为 $|\overrightarrow{AB}|$. 有时也说它是向量的长度.



图 1-1

两个向量方向相同，是指将它们移到同一始点时，它们在一条直线上，且这时两个终点分布在始点的同一侧；反之，若两个终点分布在始点的两侧，则称**两向量方向相反**.

两个向量，大小相等，方向相同，叫做**相等的向量**. 因此向量的起点可以任

意选取，或者说，向量可以自由地平行移动.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 有时也用一个字母表示，记为 $\boldsymbol{a}$.

与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，方向相反的向量，称为 **$\boldsymbol{a}$ 的反向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$. 这样就有 $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$，$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$. 若 $ABCD$ 为一平行四边形，如图 1-2，则有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DA}$.

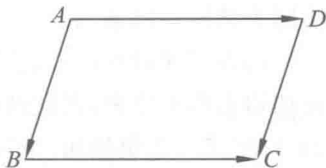


图　1-2

我们还规定长度是零的向量，叫做**零向量**，记为 $\mathbf{0}$. 零向量在不致引起混淆时，也简写为 0. 零向量的方向不定. 凡零向量皆相等. 当向量的起点和终点重合时，即当 $A=B$ 时，向量 $\overrightarrow{AB}$ 即为零向量，$\overrightarrow{AB}=\mathbf{0}$.

一组向量，如果平行移动到同一始点时，它们在一条直线上，则称这组向量是**共线**的. 共线向量也叫**平行的**，我们仍用记号"$/\!/$"，$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线（或平行）.

显然，零向量与任何向量共线.

一组向量，如果平行移动到同一始点时，它们在同一个平面上，则称这组向量是**共面**的.

显然，共线的向量必共面，任意两个向量必共面.

2. 向量的加法和减法

我们可以从位移的合成法则中抽象出两个向量的加法运算的定义.

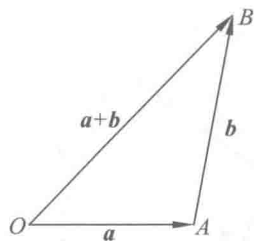


图　1-3

定义 1.1　从一点 O 起，接连作出两个向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则折线 OAB 的起点 O 到终点 B 的向量 $\overrightarrow{OB}$ 就叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（如图 1-3）.

因为在这个加法的规定中，一般情况下（即 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线时），$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 组成一个三角形，因此这个定义也叫向量加法的**三角形法则**.

我们也可以从力的合成法则——平行四边形法则中抽象出向量加法的定义.

定义 1.2　以一点 O 为公共始点，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为两邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线 OC 上的向量 $\overrightarrow{OC}$ 叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（如图 1-4）.

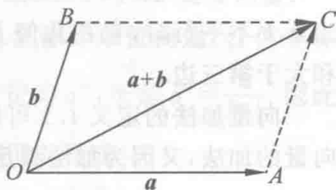


图　1-4

这个定义也叫向量加法的**平行四边形法则**.

从图 1-4 中,可以明显地看出$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$,所以三角形法则和平行四边形法则实际上是同一回事.

读者须注意到,当二已知向量平行,即同向或反向时,定义 1.2 中所说的平行四边形作不出来,因此这种情况下平行四边形法则不再适用了,而三角形法则,即定义 1.1 仍适用.请读者分别对二已知向量同向及反向的情形,写出它们的和向量的方向及模.

由向量加法的定义,我们可以直接得到,向量加法满足如下运算律.

向量加法满足交换律,就是说,对于任何向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$(如图1-5),有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

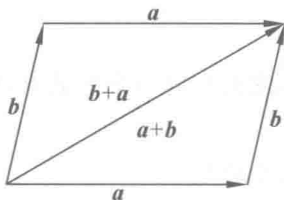


图 1-5

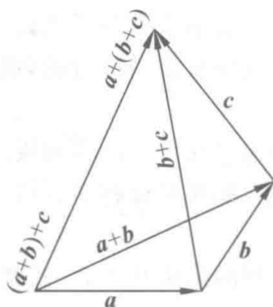


图 1-6

向量加法满足结合律,就是说,对于任何向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$(如图1-6),有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

对于任何向量 $\boldsymbol{a}$,有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}.$$

对于任何向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,有不等式(称为三角形不等式)

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不平行时,它在几何上表示三角形两边之和大于第三边.

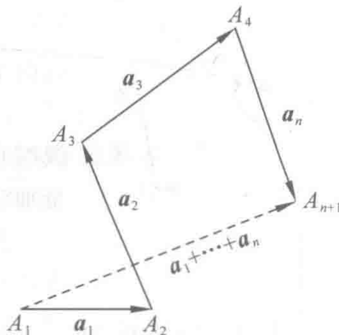


图 1-7

向量加法的定义 1.1 可以推广到任意有限个向量的加法,又因为加法满足结合律,所以

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

是有意义的.从 A_1 出发接连作$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_1,\overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\boldsymbol{a}_n$ 得折线

$A_1A_2A_3\cdots A_{n+1}$(如图 1-7),则向量$\overrightarrow{A_1A_{n+1}}$即为所求 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 之和.

上述三角形不等式,也可以推广到任意有限多个向量的情形,

$$|\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n|\leqslant|\boldsymbol{a}_1|+|\boldsymbol{a}_2|+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|.$$

向量的减法是作为加法的逆运算来定义的.

定义 1.3　向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的差是一个向量,记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,它与减向量 $\boldsymbol{b}$ 的和就是被减向量 $\boldsymbol{a}$,即

$$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a},$$

如图 1-8.

根据这个定义,再由加法的三角形法则,我们得到 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的作图. 以一点 O 为公共始点,作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BA}$即为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 或叙述为:将两个已知向量移到同一始点,则由减向量的终点到被减向量的终点的向量即为二向量的差向量.

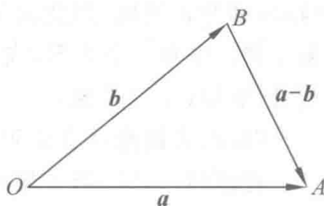


图　1-8

根据减法的定义,我们有:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}),$$

即减去一个向量就等于加上它的相反向量. 这是因为

$$[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})]+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+[(-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a},$$

于是由减法的定义得 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

这样,我们就把减法变成了加法,用不着再研究减法的运算律了.

3. 向量的数乘

定义 1.4　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记为 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向,当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 反向(如图 1-9).

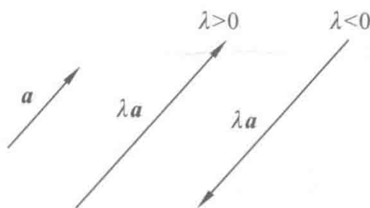


图　1-9

直观地说,数 λ 乘向量 $\boldsymbol{a}$ 就是将向量 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向伸长 $|\lambda|$ 倍.

显然,当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 任何非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$,于是 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 因此任何非零向量 $\boldsymbol{a}$ 都可以写成

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0.$$

数量与向量的乘法满足结合律和两个分配律,即对任意实数 λ,μ 和任意向

量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,有

$$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a};\tag{1.1}$$

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a};\tag{1.2}$$

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.\tag{1.3}$$

我们来证明这些性质.要证明等式两端的向量相等,由定义需证明它们是同向等长的.

先证(1.1)式.等式两端的向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 及 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的模都等于 $|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|$.再看方向,当 λ 与 μ 同号时,$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 和 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 λ 与 μ 反号时,$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 和 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 反向.因此向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 和 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 模相等,方向相同,故它们相等.如果 λ 和 μ 中有一个为零,或 $\boldsymbol{a}$ 为零向量,则 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 及 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 皆为零向量,故它们也相等,所以(1.1)式成立.

(1.2)式留给读者证明.

再证(1.3)式.当 λ 及 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 有一个是零时,(1.3)式显然成立,因此只要考虑 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 及 λ 都不为零的情形:

(1)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时(如图 1-10).若 $\lambda>0$ 时,则 $\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\lambda\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{EC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{DB}=\lambda\boldsymbol{b}$.由于 $\triangle AEC\backsim\triangle ADB$,所以 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}$.又因为 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{AB}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.另一方面 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,所以 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

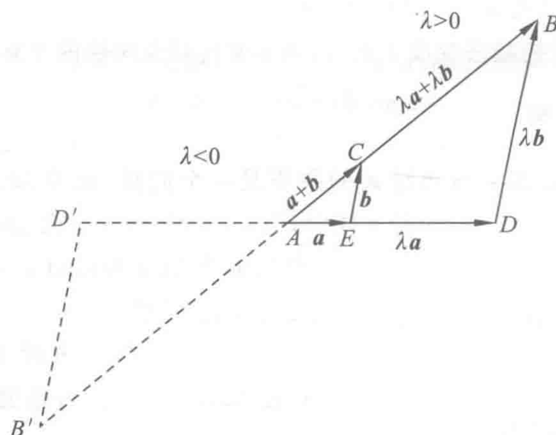


图 1-10

当 $\lambda<0$ 时的证明请读者补出.

(2)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时,这时 $\boldsymbol{b}$ 可以表示为 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$(为什么?),

于是

$$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=\lambda[(1+\mu)\boldsymbol{a}]=\lambda(1+\mu)\boldsymbol{a}$$
$$=(\lambda+\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\mu\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.$$ □

由上面的讨论我们得到，向量的加法和数乘向量（称为向量的**线性运算**）与实数及多项式的相应运算满足相同的运算律，因此对向量加法和数乘向量可以像实数及多项式一样去进行运算.

4. 共线及共面向量的判定

定理 1.1　向量 $\boldsymbol{b}$ 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是存在实数 λ，使

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}. \tag{1.4}$$

证　充分性　若 $\lambda=0$，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量，即 $\boldsymbol{b}$ 为零向量，显然 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

若 $\lambda\neq0$，由数乘向量的定义，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向，即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

必要性　若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则取 $\lambda=0$.

若 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则取 λ，使 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时，λ 取正号；当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时，λ 取负号. 这时就有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$（请读者根据数乘向量的定义自行验证）. □

推论 1.1　两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 λ,μ，使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \tag{1.5}$$

证　充分性　不妨设 $\mu\neq0$，于是有 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{\lambda}{\mu}\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线.

必要性　若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 全为零则显然成立，不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线及定理 1.1，存在实数 k，使得 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$，于是有 $k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 取 $\lambda=k,\mu=-1$，即可得（1.5）式. □

定理 1.2　若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在实数 λ，μ，使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}. \tag{1.6}$$

证　充分性　由数乘向量及向量加法的定义，得到 $\boldsymbol{c}$ 是以 $\lambda\boldsymbol{a}$ 和 $\mu\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量（如图 1-11），所以 $\lambda\boldsymbol{a},\mu\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共面，因而 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面.

必要性　从一点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$（如图 1-12），于是 $\overrightarrow{OC}$ 在 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 所决定的平面上. 由 C 分别作 OB,OA 的平行线，与直线 OA,OB 分别交于 A' 和 B' 点，于是有

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}.$$

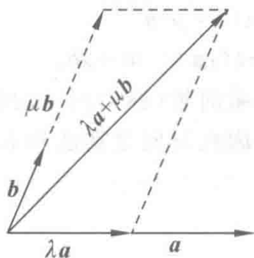


图 1-11

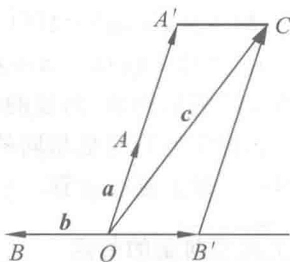


图 1-12

由定理 1.1,存在 λ,μ,使得$\overrightarrow{OA'}=\lambda\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB'}=\mu\overrightarrow{OB}$. 代入上式即得(1.6)式. □

推论 1.2 三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是,存在不全为零的实数 λ,μ,ν,使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}. \tag{1.7}$$

作为练习,读者可以仿照推论 1.1 的证明方法,证明本推论.

5. 线段的定比分点

在用向量解几何问题时,为方便起见,常常在平面或空间中选定一点 O 作为起点,而将终点在 $A,B,\cdots,P$ 的向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\cdots,\overrightarrow{OP}$,称为点 $A,B,\cdots,P$ 的**半径向量**或**定位向量**,简称**向径**,简记为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\cdots,\boldsymbol{P}$. 这样,就在空间中的点与它的半径向量之间建立起一一对应的关系,从而把有关点的讨论转化为有关向量的讨论.

在线段 P_1P_2 上求一点 P,使得由 P 分成的两个有向线段$\overline{P_1P}$与$\overline{PP_2}$的量的比为定数 $\lambda(\neq -1)$,即$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$.

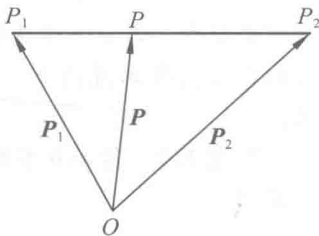


图 1-13

任取一点 O,假定$\overrightarrow{OP_1}$及$\overrightarrow{OP_2}$为已知. 因为

$$\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2},$$

即

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}=\lambda(\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP}),$$

$$(1+\lambda)\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2},$$

所以有

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda},$$

简记为

$$\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{P}_1+\lambda\boldsymbol{P}_2}{1+\lambda}. \tag{1.8}$$

$\overrightarrow{OP}$的终点即为所求之 P 点(P 点位置与公共起点 O 的选取无关).

公式(1.8)称为向量形式的**定比分点公式**.

线段 AB 的中点为 M,因为$\frac{AM}{MB}=1$,所以

$$\boldsymbol{M}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}. \tag{1.9}$$

$\triangle ABC$ 的重心为 G,则有

$$\boldsymbol{G}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{3}. \tag{1.10}$$

(1.9)式称为**线段中点公式**(向量形式).

(1.10)式称为**三角形重心公式**(向量形式).

例　证明平行四边形的对角线互相平分.

证　设 $ABCD$ 为平行四边形,AC,BD 的中点分别为 E 及 F,

$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$,

由中点公式得

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}),$$

而$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$,所以

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}),$$

故$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$,即 E 与 F 重合,亦即 AC 与 BD 互相平分.　□

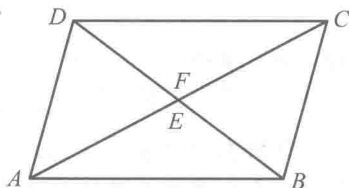


图　1-14

习　题　一

1. 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$,求$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CD}$,$\overrightarrow{DA}$.

2. 已知平行四边形 $ABCD$ 的 BC 和 CD 的中点分别为 K 和 L,且$\overrightarrow{AK}=\boldsymbol{k}$,$\overrightarrow{AL}=\boldsymbol{l}$,求$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{CD}$.

3. 设 M 是线段 AB 的中点,试证对于任意一点 O,

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}).$$

4. 设 G 是$\triangle ABC$ 的重心,试证对于任意一点 O,

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

5. 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的对角线的交点,试证对于任意一点 O,

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}).$$

6. 设 A,B,C,D 是一个四面体的顶点，M 和 N 分别是边 AB,CD 的中点. 试证

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$$

7. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{r}_1,\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{r}_2,\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}_3$ 是以 O 点为顶点的平行六面体的三条边，又该平行六面体过 O 点的对角线与平面 ABC 的交点为 P，求向量$\overrightarrow{OP}$.

8. 已知$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{p},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{q},\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{r}$，$I$ 为$\triangle ABC$ 的内心，A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c. 试证

$$\overrightarrow{OI}=\frac{a\boldsymbol{p}+b\boldsymbol{q}+c\boldsymbol{r}}{a+b+c}.$$

9. 在$\triangle ABC$ 中，点 D 与 E 分别在 BC 及 CA 边上，且 $BD=\frac{1}{3}BC,CE=\frac{1}{3}CA$，$AD$ 与 BE 交于 G，试证

$$GD=\frac{1}{7}AD,GE=\frac{4}{7}BE.$$

10. 问关系式

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\text{ 及 }|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$$

分别在什么条件下成立？

11. 三个向量有公共的始点 O，并分别以$\triangle ABC$ 的顶点为终点. 试证

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{0}$$

的充要条件为：O 点是$\triangle ABC$ 的重心.

12. 三点 A,B,C 共线的充要条件是存在三个均不是零的数 l,m,n，使

$$l\boldsymbol{A}+m\boldsymbol{B}+n\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}\,,\quad l+m+n=0.$$

13. 证明推论 1.2.

14. 空间四点 A,B,C,D，其中无三点共线，则四点共面的充要条件是，存在四个均不是零的数 p,q,r 和 s，使得

$$p\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{B}+r\boldsymbol{C}+s\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}\,,\quad p+q+r+s=0.$$

15. 三角形各边依次以同比分之，则三个分点所成的三角形必与原三角形有相同的重心. 即已知$\triangle ABC$ 三边 AB,BC,CA 上各一点 L,M,N，有

$$\frac{AL}{LB}=\frac{BM}{MC}=\frac{CN}{NA},$$

且$\triangle ABC$ 的重心为 G，$\triangle LMN$ 的重心为 W. 试证 G 与 W 重合.

16. 已知空间四边形 $ABCD$，四点 M,N,P,Q 分别将 AB,AC,DB,DC 以同比

分之，即

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=\frac{DP}{PB}=\frac{DQ}{QC},$$

试证 $MNQP$ 是平行四边形.

17. 已给不共线向量$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，试求一个向量 $\boldsymbol{c}$，使它与$\angle AOB$ 的角平分线平行.

§2　向量的内积

1. 向量的夹角

两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的夹角，是指将它们移到同一始点所得到的那个在 0 和 π 之间的角(如图 2-1)，记为$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. 于是，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相同时，$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时，$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi$；$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$. 当 $\lambda>0$ 时，$\angle(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；当 $\lambda<0$ 时，$\angle(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi-\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

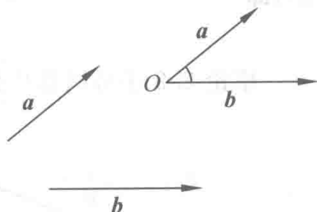


图　2-1

2. 向量的射影

一个点 P 在一个轴 g 上的**射影**，是通过 P 且垂直于 g 的平面与 g 的交点 P'(如图 2-2).

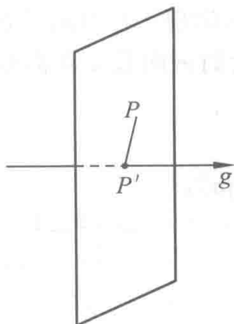


图　2-2

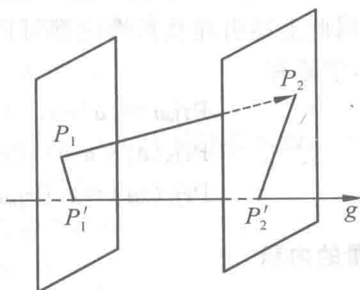


图　2-3

定义 2.1　向量$\overrightarrow{P_1P_2}$在轴 g 上的射影，是指由$\overrightarrow{P_1P_2}$的始点 P_1 和终点 P_2 在 g 上的射影 $P_1{}'$ 及 $P_2{}'$ 所得到的 g 轴上的有向线段 $P_1{}'P_2{}'$ 的量，记为 $\mathrm{Prj}_g\overrightarrow{P_1P_2}$(如图 2-3).

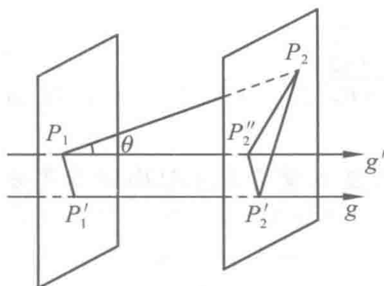


图 2-4

于是有

引理 2.1 向量$\overrightarrow{P_1P_2}$在轴 g 上的射影，等于向量的模乘以该向量与轴的夹角 θ 的余弦(如图 2-4)，即

$$\mathrm{Prj}_g\,\overrightarrow{P_1P_2}=|\overrightarrow{P_1P_2}|\cos\theta.$$

推论 2.1 相等的向量在同一轴上的射影相等.

推论 2.2 两向量之和在一轴上的射影等于它们的射影的和，

即
$$\mathrm{Prj}_g(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_g\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_g\boldsymbol{b}.$$

推论 2.3 数乘向量在一个轴上的射影等于该数乘以向量在此轴上的射影，即

$$\mathrm{Prj}_g(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(\mathrm{Prj}_g\boldsymbol{a}).$$

推论 2.2 还可以推广到任意有限个的情形(如图 2-5).

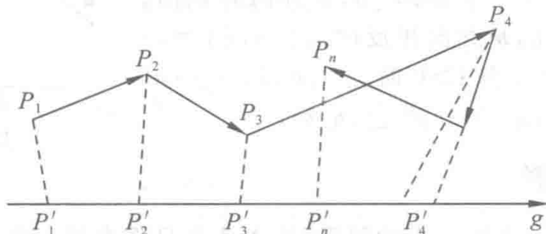


图 2-5

我们以后说向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的射影，即是指向量 $\boldsymbol{a}$ 在与向量 $\boldsymbol{b}$ 同向的轴上的射影，因此上述引理及其推论都可以使用. 我们记向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的射影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，于是有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\tag{2.1}$$

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}_2,\tag{2.2}$$

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}).\tag{2.3}$$

3. 向量的内积

定义 2.2 两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的**内积**是这两个向量的模乘以它们的夹角的余弦，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).\tag{2.4}$$

内积是一个数量，又称**数量积**. 内积乘法常用一个点来表示(也可省略不

写),所以内积又称**点积**,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 读成"$\boldsymbol{a}$ 点 $\boldsymbol{b}$".

特别地,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有一个是零向量时,它们的内积为零,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

应用内积的定义,我们可以解决哪些几何问题呢?

(1)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为二非零向量,当$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时,$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;反之,当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时,因为 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,$|\boldsymbol{b}|\neq 0$,所以 $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$. 即 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\pi}{2}$,亦即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 因此我们得到

定理 2.1 两个非零向量垂直的充要条件是它们的内积为零,即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(2)我们还可以应用公式(2.4)来计算二非零向量的夹角,

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \tag{2.5}$$

由(2.5)又可得到二非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角有如下结论:

$$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\text{为锐角}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0;$$
$$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\text{为钝角}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0.$$

(3)利用内积来计算向量的长度. 对于任意向量 $\boldsymbol{a}$,由公式(2.4)得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2,$$

记 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$,于是

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}. \tag{2.6}$$

(4)可以计算一个向量在另一个向量上的射影. 因为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,所以公式(2.4)可以表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}(=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}), \tag{2.4$'$}$$

于是有

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}. \tag{2.7}$$

内积运算满足如下运算律:对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及任意实数 λ,有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}.\text{(交换律)} \tag{2.8}$$

$$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).\text{(与数乘的结合律)} \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.\text{(分配律)} \tag{2.10}$$

注意到$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$,公式(2.8)由定义可以直接得到.

公式(2.9)及(2.10)可用射影来证明:

由内积的表示式(2.4)′以及(2.3)式和(2.2)式,我们有

$$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}(\lambda\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{b}|(\lambda\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a})$$

$$=\lambda(|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a})=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b});$$

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})$$
$$=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.$$

运用以上算律,我们有

$$\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c})=\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},$$

及

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d},$$
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$$

等等,即内积可以像多项式一样去进行运算.但需特别注意:

(1)三个向量作内积“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$”无意义,但$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$及$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$有意义,前者指数量$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$乘向量$\boldsymbol{c}$,后者指数量$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$乘向量$\boldsymbol{a}$,一般地说,它们表示两个不同的向量.

(2)消去律不成立,即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$推不出$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.这是因为内积为零时,不必至少有一个因子向量为零.

例 1 用向量证明三角形三边上的高线交于一点.

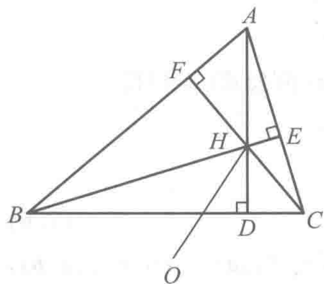


图 2-6

证 设$\triangle ABC$三边上的高线分别为AD,BE和CF(如图 2-6).

(分析:要证AD,BE,CF交于一点,只需证AD与BE的交点H也在CF上,即证CH垂直于AB就行了.)

设AD,BE交于H,在平面上任取定一点O,且A,B,C,D,E,F,H诸点的定位向量记为$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E},\boldsymbol{F},\boldsymbol{H}$.因为$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$,所以

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0,(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})=0,$$
$$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{C}-\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0. \quad ①$$

又因为$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$,所以

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0,(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})=0,$$
$$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=0. \quad ②$$

①②两式相加得

$$\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=0,$$

即

$$\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0,$$
$$(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{C})\cdot(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0,$$
$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{BA}=0.$$

所以$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$,故$H$在$CF$上. □

例 2　用向量证明三角形余弦定理,即$\triangle ABC$中,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

此处a,b,c是$\angle A,\angle B,\angle C$对边的边长(如图 2-7).

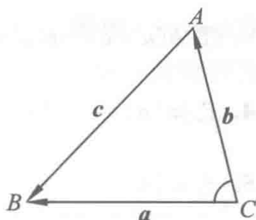


图　2-7

证　因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$,所以

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{AB})^2&=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})^2\\&=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CA}^2-2\,\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA},\end{aligned}$$

即

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{CB}|^2+|\overrightarrow{CA}|^2-2|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{CA}|\cos\angle(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}).$$

已知$|\overrightarrow{AB}|=c,|\overrightarrow{BC}|=a,|\overrightarrow{CA}|=b,\angle(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=C$,代入上式得

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$ □

例 3　证明施瓦茨(Schwarz)不等式

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|.$$

证一　因为$|\cos\angle(a,b)|\leqslant 1$,由内积表示式(2.4)即可得.

证二　用内积的性质推证.

对于任意实数x,有

$$(\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+x^2\boldsymbol{b}^2\geqslant 0$$

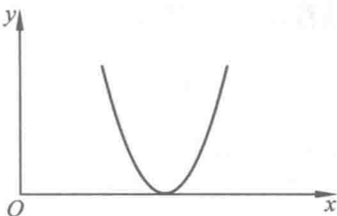


图　2-8

(这是因为左端是一个向量的模的平方,故大于等于 0). 把它看做是关于x的一个二次三项式,所以应该有判别式

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2-|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\leqslant 0$$

(这是因为$y=f(x)=\boldsymbol{b}^2x^2+2x\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}^2\geqslant 0$,所以方程$f(x)=0$不可能有两个不等实根,即$y=f(x)$的图像不可能与$x$轴有两个不同的实交点(如图 2-8),所以判别式小于等于零). □

习　题　二

1. 下列等式是否正确?

①$|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$;　② $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2$;　③ $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}$;

④$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$;　⑤$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

2. 举出一个反例,推翻下述命题:

"若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$,且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$."

3. 已知三个非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,求证向量$\boldsymbol{a}$分别与下列二向量垂直:

① $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$； ② $\boldsymbol{b}-\dfrac{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}{\boldsymbol{a}^2}$.

4. 已知$|\boldsymbol{a}|=8$,$|\boldsymbol{b}|=5$,$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

5. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$,求：

①$(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$； ②$3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 与 $2\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 的夹角.

6. 设 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=2$,$|\boldsymbol{c}|=4$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

7. 已知$|\boldsymbol{a}|=3$,$|\boldsymbol{b}|=5$,$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线,试确定常数 k,使 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 和$\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$垂直.

8. 设三非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 等长,且两两互相垂直.求证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 所夹之角相等.

9. 证明三角形三条中线长度的平方和等于三边长度的平方和的$\dfrac{3}{4}$.

10. 求证空间四边形四边的平方和等于二对角线的平方和加上二对角线中点连线的平方的 4 倍.

11. 如果一个四面体有两对对棱互相垂直,则第三对对棱也必垂直,而且三对对棱平方和相等.

12. 对于任意四边形 $ABCD$,证明:$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

13. 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,求证：

① $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$；

② $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$. 并说明每个等式的几何意义.

14. 设 P 为平面上单位圆周上的任意一点,O 为圆心,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为圆内接正 n 边形的顶点.试证：

① $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{0}$； ② $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PA_2}+\cdots+\overrightarrow{PA_n}=$常向量.

***15.** 设一个四边形各边之长是 a,b,c,d,且其对角线互相垂直.求证:各边之长也是 a,b,c,d 的任意一个四边形的两条对角线也必互相垂直.

§3 向量的外积

1. 外积的定义

设有不共面的三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,将它们移到同一始点,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 决定一个平面,而 $\boldsymbol{c}$ 指向平面的一旁.将右手四指并拢与姆指分开,使四指向掌心弯曲的方

向，表示从 $\boldsymbol{a}$ 的方向经过小于平角的转动达到 $\boldsymbol{b}$ 的方向，此时若姆指方向与 $\boldsymbol{c}$ 方向指向平面的同一旁，则称向量组 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 构成**右手系**（如图 3-1 甲），否则称为**左手系**（如图 3-1 乙）.

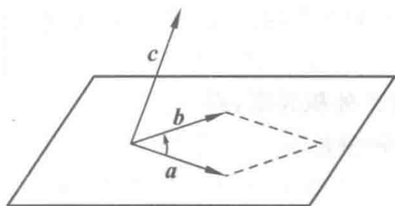


图　3-1 甲

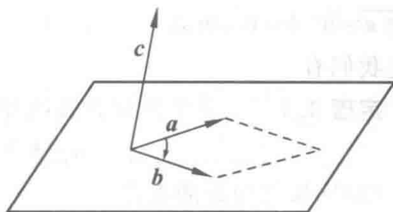


图　3-1 乙

容易看出，若 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 是右手系，则 $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$，$(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 也都是右手系，而 $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$ 及 $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$ 都是左手系.

定义 3.1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**外积**是一个向量，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，它的长度

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\tag{3.1}$$

它的方向垂直于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，且 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ 构成右手系（如图 3-2）.

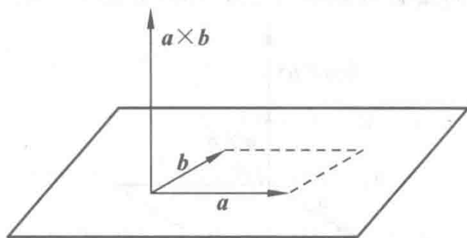


图　3-2

外积是一个向量，所以又叫**向量积**，也叫**叉积**，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 读作"$\boldsymbol{a}$ 叉 $\boldsymbol{b}$".

特别地，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

应用外积的定义，可以解决下列几何问题：

(1)计算平行四边形的面积.

以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为

$$S_{\square}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

于是 $S_{\square}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$，即外积的模是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积（如图 3-3），这就是外积的模的几何意义.

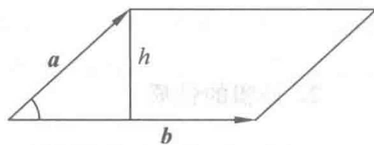


图　3-3

$\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

A,B,C 三点共线 $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{0}$.

(2)判断二向量是否共线.

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为二非零向量，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则有 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ 或 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi$，$\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$，所以 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 反之，若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ ，则有 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ ，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ ，所以 $\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$，$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=0$ 或 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\pi$，所以 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 于是我们有

定理 3.1 二非零向量共线的充要条件是外积为零，即

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

(3)计算二向量的夹角.

由公式(3.1)得到

$$\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}. \tag{3.2}$$

(4)求与二已知向量皆垂直的向量.

因为外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的方向是既垂直于 $\boldsymbol{a}$，又垂直于 $\boldsymbol{b}$，所以同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 的向量必可表示为 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$(如图 3-4).

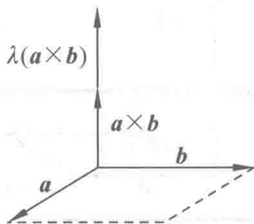


图 3-4

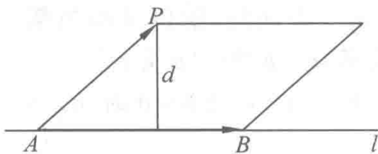


图 3-5

(5)求点 P 到直线 l 的距离.

在直线 l 上，任取定一向量$\overrightarrow{AB}$，则由外积的模的几何意义(如图 3-5)，可得点 P 到 l 的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}.$$

2. 外积的性质

外积运算满足如下运算律，对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及任意实数 λ，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.\text{(反交换律)} \tag{3.3}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\text{(与数乘的结合律)} \tag{3.4}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.\text{(分配律)} \tag{3.5}$$

(3.3)式和(3.4)式由外积的定义即可得到.

(3.5)式的证明如下：

首先，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 其中有一个为零时，(3.5)式成立.

其次，显然只需对 $\boldsymbol{c}$ 是单位向量的情形证明(3.5)式成立即可，因为在一般情形下，再应用(3.4)式即可得到.

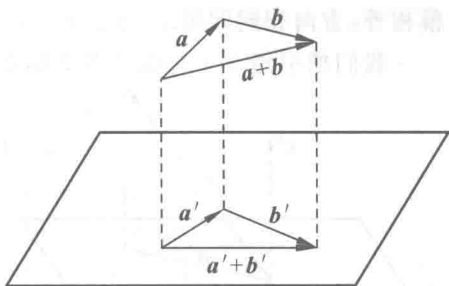


图 3-6

向量 $\boldsymbol{a}$ 在一个平面上的**射影向量**是以 $\boldsymbol{a}$ 的始点在平面上的射影为始点，$\boldsymbol{a}$ 的终点在平面上的射影为终点的向量. 显然，相等的向量在同一平面上有相等的射影向量，向量和的射影向量等于射影向量的和(如图 3-6).

引理 3.1 设 $\boldsymbol{a}$ 在与 $\boldsymbol{c}$ 垂直的平面 α 上的射影向量为 $\boldsymbol{a}'$(如图 3-7)，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}$.

证 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\sin\theta,\ \theta=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$，

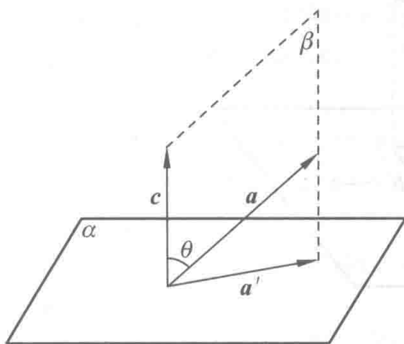


图 3-7

因为 $\angle(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{c})=\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$|\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{c}|\sin\angle(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}'||\boldsymbol{c}|.$$

因为 $\angle(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{a})=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，所以 $\cos\angle(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{a})=\sin\theta$，于是 $|\boldsymbol{a}|\sin\theta=|\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{a})=|\boldsymbol{a}'|$，故 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}|$.

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{c}$，于是垂直于由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 决定的平面 β，且 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})$ 组成右手系. $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}$ 垂直于 $\boldsymbol{a}'$ 及 $\boldsymbol{c}$，于是垂直于由 $\boldsymbol{a}'$ 与 $\boldsymbol{c}$ 所决定的平面. 因为 $\boldsymbol{a}'$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 共面，所以 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}$ 也垂直于平面 β，于是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}$ 共线. 又由 $(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c})$ 组成右手系，以及从 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}',\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}$ 的几何位置分析(如图 3-7)可得 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c})$ 亦为右手系，所以 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}$ 方向相同. □

引理 3.2 设 $|\boldsymbol{c}|=1$，$\boldsymbol{a}'$ 是与 $\boldsymbol{c}$ 垂直的平面 α 上的一个向量(如图 3-8)，$\boldsymbol{a}'$ 在平面 α 内绕始点顺时针旋转 90° 得 $\boldsymbol{a}_1$，则 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}$.

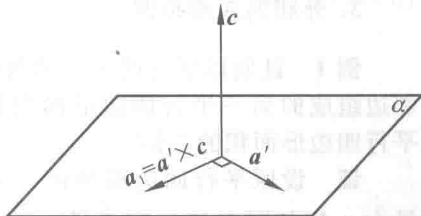


图 3-8

证明是明显的，只要验证一下它们的

模相等、方向相同即可.

我们把引理 3.1 与引理 3.2 结合在一起得：

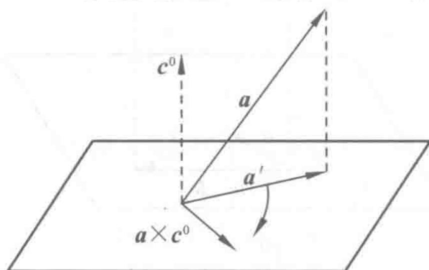


图 3-9

设 $\boldsymbol{c}^0$ 为单位向量，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}^0$ 的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0$ 是将 $\boldsymbol{a}$ 在与 $\boldsymbol{c}^0$ 垂直的平面 α 上的射影向量 $\boldsymbol{a}'$ 绕 $\boldsymbol{a}'$ 的始点在 α 内顺时针旋转 90°所得的向量(如图 3-9).

设 $\boldsymbol{c}^0$ 是单位向量，我们现在证明

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0.$$

设 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ 分别是 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在与 $\boldsymbol{c}^0$ 垂直的平面上的射影向量，且 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ 也组成一个三角形(如图 3-10). 这时由引理 3.2, $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}^0,\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}^0$ 与 $(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')\times\boldsymbol{c}^0$ 可以相应地由 $\boldsymbol{a}',\boldsymbol{b}',\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}'$ 顺时针旋转 90°得到，且 $\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}^0,\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}^0,(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')\times\boldsymbol{c}^0$ 仍为一三角形. 因此，由向量加法的三角形法则，有

$$(\boldsymbol{a}'+\boldsymbol{b}')\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}'\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}'\times\boldsymbol{c}^0.$$

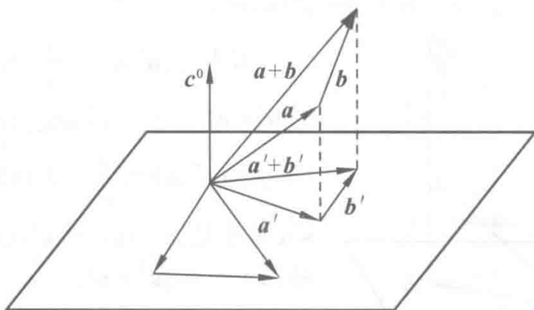


图 3-10

再由引理 3.1 即得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}^0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}^0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}^0. \qquad \square$$

注意在向量的外积运算中，消去律不成立，即由 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 推不出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$. 这是因为外积为零时，两个因子中不必至少有一个是零的缘故.

3. 外积的应用举例

例 1 证明以平行四边形的两条对角线为邻边组成的另一平行四边形的面积等于原来平行四边形面积的 2 倍.

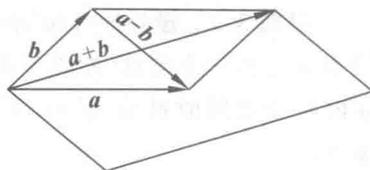


图 3-11

证 设原平行四边形的两个邻边上的向量为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$(如图 3-11)，则该平行四边形的面积

为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$. 它的两条对角线上的向量分别为$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,则以$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$及$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积为$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|$. 而

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$
$$=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b},$$

又因为 $$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

所以 $$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}),$$

因此 $$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$ □

例 2 用向量证明三角形的正弦定律,即$\triangle ABC$中

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

证 如图 3-12,记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,于是$\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,因此有

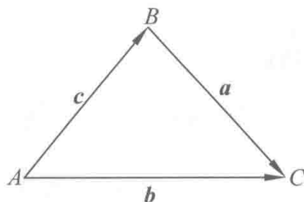


图 3-12

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},$$

即有 $$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},$$

因此 $$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,$$

于是

$$|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\sin\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

因为$\angle(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\angle A$,$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=\pi-\angle B$,$\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\angle C$,又$|\boldsymbol{a}|=a$,$|\boldsymbol{b}|=b$,$|\boldsymbol{c}|=c$,所以有

$$bc\sin A=ac\sin B=ab\sin C,$$

即得正弦定律. □

例 3 对于不共线的两非零向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,证明

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2,$$

并由此推出关于三角形面积的三斜求积公式(也称海伦(Heron)公式)

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

此处a,b,c是$\triangle ABC$三边之长,s是$\triangle ABC$周长之半,$S_{\triangle ABC}$表示$\triangle ABC$的面积.

证 由外积定义,有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b});$$

由内积定义,有

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

所以有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

设△ABC 三边上的向量为$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$(如图 3-13),则有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0},\text{即 }\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}.$$

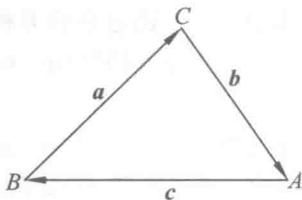


图 3-13

两边平方,再移项得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}^2-\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2).$$

另一方面,

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}|=a,$$

$$|\boldsymbol{b}|=b,|\boldsymbol{c}|=c,$$

所以

$$\begin{aligned}(S_{\triangle ABC})^2&=\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\frac{1}{4}(c^2-a^2-b^2)^2\right]\\&=\frac{1}{16}[2ab+(c^2-a^2-b^2)][2ab-(c^2-a^2-b^2)]\\&=\frac{1}{16}[c^2-(a-b)^2][(a+b)^2-c^2]\\&=\frac{1}{16}(c+a-b)(c-a+b)(a+b+c)(a+b-c).\end{aligned}$$

将 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$代入得

$$S_{\triangle ABC}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$ □

习 题 三

1. 根据外积运算满足的运算律证明:对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及任意实数 λ 和 μ,有

①$\boldsymbol{a}\times\lambda\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

②$\lambda\boldsymbol{a}\times\mu\boldsymbol{b}=\lambda\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$;

③$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

(证明的每一步,都要注明所根据的运算律.)

2. 下面两个等式对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 成立吗?并说明理由.

①$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$;

②$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$.

3. 求证$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\leqslant\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$，并求等号成立的条件，并对上述不等式作出几何解释.
4. 已知二非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，求$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$共线的条件.
5. 已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$满足条件$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d}$，证明$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d}$与$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$共线.
6. 已知二非零向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，求$k$值，使$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$共线.
7. 设G为$\triangle ABC$的重心，求证：G将$\triangle ABC$分成的三个三角形面积相等，即$S_{\triangle GAB}=S_{\triangle GBC}=S_{\triangle GCA}$.
8. 试举一反例说明对于向量的外积运算，消去律不成立，即推翻下述命题："若$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$，且$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$."

§4 混合积和双重外积

这一节介绍三个向量之间的乘法.

1. 向量的混合积

定义 4.1 向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的外积，再与向量$\boldsymbol{c}$作内积，结果是一个数量，称为三向量依顺序$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的**混合积**，记为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$，即

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}. \tag{4.1}$$

我们可以从图 4-1 考查混合积$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$的几何意义.

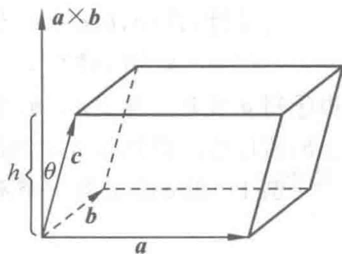


图 4-1

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\\&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\angle(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\\&=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

1° 当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$组成右手系时（如图 4-1），$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$指向$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$所决定的平面的同一侧，$\angle(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<\frac{\pi}{2}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}>0$，所以$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0$. 反之，若$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>0$，则有$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$组成右手系.

2° 当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$组成左手系时（如图 4-2），$\angle(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})>\frac{\pi}{2}$，$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}<0$，所以$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<0$. 反之，若$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})<0$则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是左手系.

因为$\boldsymbol{c}$在$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$上的射影$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}$的绝对值$|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}|$就是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为邻边的

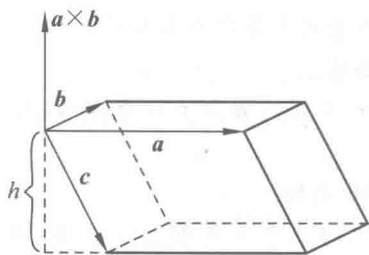


图 4-2

平行六面体的高 h，而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ 是以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，即上述平行六面体的底面积，所以我们有

$$\begin{aligned}|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})| &= |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}| \\ &= |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|h,\end{aligned}$$

即混合积 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 的绝对值是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为邻边的平行六面体的体积.

根据混合积的定义及上述几何意义，我们容易得到混合积的下述性质：

① $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=0$； (4.2)

② $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$
$\quad=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$； (4.3)

③ $(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$； (4.4)

④ $(\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$（$\lambda$ 是实数）. (4.5)

定理 4.1 三向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

证 必要性：设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中有一个为零或有两个共线时，显然有 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$；当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 非零且无二向量共线时，由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$，于是

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\lambda\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+\mu(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0.$$

充分性：设 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$，即 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，于是有

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，或② $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，或③ $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$.

由①得 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 为零或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，于是由①，②都得到 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 因为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$，所以由③得到 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. □

例 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为三个不共面的向量，求任意向量 $\boldsymbol{d}$ 关于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的分解式

$$\boldsymbol{d}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c} \qquad (*)$$

中的诸系数 x,y,z.

解 决定系数 x 的方法是用向量 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 与 $(*)$ 式两端的向量作混合积，

$$(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=x(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，所以 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\neq 0$. 于是有

$$x=\frac{(\boldsymbol{d},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

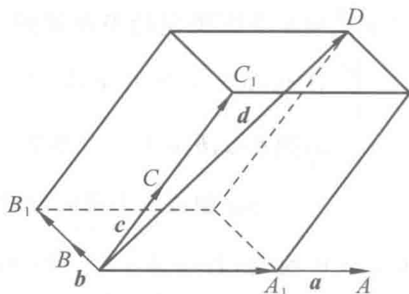


图 4-3

同理可得

$$y=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\qquad z=\frac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.\qquad\square$$

因为例 1 中求得的 x,y,z 都是唯一确定的，于是得到

推论 4.1　空间任一向量关于三个不共面的向量的分解式是唯一的.

2. 向量的双重外积

现在我们讨论三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的双重外积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$. 作为它的一个特殊情形，我们先讨论$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$.

例 2　证明$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^2)\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$.　(4.6)

证　若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 有一个为零，则(4.6)显然成立. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 非零，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线时，设 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，此时(4.6)两端皆为零，等式成立.

当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 由外积定义有$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，所以$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面. 于是由定理 1.2 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.\qquad(**)$$

先设法确定 μ，因为$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{a}$，用$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}$ 与上式两端作内积，左端得

$$[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]\cdot[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]^2=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\boldsymbol{a}^2,$$

(注意到 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$ 即可得.)

右端得

$$[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]\cdot\mu\boldsymbol{b}=\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2,$$

于是有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2\boldsymbol{a}^2=\mu(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2,$$

所以 $\mu=\boldsymbol{a}^2$.

再设法确定 λ，用 $\boldsymbol{a}$ 与(**)式两端作内积，注意到$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{a}$，左端得

$$[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{a}=0,$$

注意到 $\mu=\boldsymbol{a}^2$，右端得

$$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a})^2+\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2(\lambda+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}),$$

于是有 $\boldsymbol{a}^2(\lambda+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=0$. 因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda=-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 故

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}^2)\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.\qquad\square$$

定理 4.2　对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.\qquad(4.7)$$

证　若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 有一个是零，等式显然成立. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 非零且 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，可直接验证(4.7)式两端均等于零.

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$．由外积定义有 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，所以 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面．由定理 1.2 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}. \qquad (***)$$

为了确定系数 λ，用 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 与上式两端作内积．左端得（注意混合积的性质及例 2 的结果）

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]&=[\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=[\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

右端得 $$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

于是有 $$-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\lambda(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

所以 $$\lambda=-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).$$

为了确定系数 μ，用 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 与 $(***)$ 式两端作内积．左端得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}]&=[\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=-[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=-[\boldsymbol{c}^2\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{c}]\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

右端得 $$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})=\mu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).$$

于是有 $$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\mu(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}),$$

所以 $$\mu=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}).$$

将 λ 及 μ 的值代入 $(***)$ 即得 (4.7) 式． □

推论 4.2 $$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}. \qquad (4.8)$$

推论 4.3 $$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\boldsymbol{a}\\&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}.\end{aligned}$$

由双重外积公式，我们还可以得到下面两个恒等式：

①雅可比(Jacobi)恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \qquad (4.9)$$

②拉格朗日(Lagrange)恒等式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}). \qquad (4.10)$$

注意，向量的外积运算，不但不满足交换律，而且也不满足结合律，即对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，一般情况下，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

习　题　四

1. 求证三个向量 $m\boldsymbol{b}-n\boldsymbol{c}, n\boldsymbol{c}-l\boldsymbol{a}, l\boldsymbol{a}-m\boldsymbol{b}$ 必共面.(要求用两种方法证明)
2. 两个非零向量 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 不共线,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AC}=2\boldsymbol{e}_1+8\boldsymbol{e}_2, \overrightarrow{AD}=3(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$,求证 A,B,C,D 共面.
3. 设 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}$ 为任意向量,试证 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s},\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}$ 共面.
4. 设 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 为任意向量,试证 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 共线.
5. 设有非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 共面,问 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 有什么关系?
6. 已知 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,求证 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.
7. 若 $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ 是两两互相垂直的组成右手系的单位向量,试证 $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=1$.
8. 对于任意四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$,试证
$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})-\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})+\boldsymbol{d}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}.$$
9. 证明推论 4.2 和推论 4.3.
10. 证明雅可比恒等式和拉格朗日恒等式.
11. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量,试举一反例说明对于向量的外积运算,结合律不成立,即“$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$”不成立,并推求等式成立的充要条件.
12. 证明若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为非零向量,则有
$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|,$$
并叙述这个不等式的几何意义,再求等号成立的充要条件.
13. 证明
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=0.$$
14. 证明 $\boldsymbol{a}\times\{\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\}=\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}^2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}$.
15. 证明 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})$
$$=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}).$$
16. 化简 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})]$.
17. 证明 $\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.
18. 证明 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2$.
19. 三向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 适合
$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{0},$$
试证三点 A,B,C 共线.

第二章　平面与直线

§5　直角坐标系、仿射坐标系以及直角坐标系中的向量计算

1. 直角坐标系和仿射坐标系

定义 5.1　设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是空间中以 O 为起点的三个向量，它们两两垂直并且都是单位向量，则 $O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为空间的一个以 O 为原点的**直角标架**或**直角坐标系**，记为 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$. 如果向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 成右手系，则 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 称为一个**右手直角标架**或**右手直角坐标系**. 否则称为**左手直角标架**或**左手直角坐标系**. 我们把 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为该直角坐标系的**基向量**.

定义 5.2　如果我们不要求 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 单位长度且两两正交，只要求它们不共面，则 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 称为空间的一个以 O 为原点的**仿射标架**或**仿射坐标系**. 如果向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 成右手系，则 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 称为一个**右手仿射标架**或**右手仿射坐标系**. 否则称为**左手仿射标架**或**左手仿射坐标系**. 我们把 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 称为该仿射坐标系的基向量.

定理 5.1　设 $O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是空间的一个仿射坐标系(直角坐标系)，则任意一个向量 $\boldsymbol{v}$ 可以唯一表示成 $\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 称 (x,y,z) 为向量 $\boldsymbol{v}$ 在该坐标系 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 下的坐标. 记为 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$.

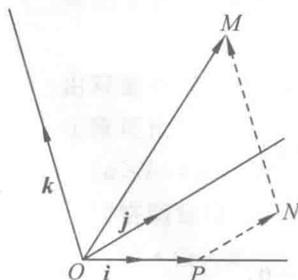


图　5-1

证　平行移动 $\boldsymbol{v}$ 使它的起点至坐标原点 O，设它的终点为 M，即 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{v}$. 过 M 点作平行于向量 $\boldsymbol{k}$ 的直线交向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 张成的平面于 N，过 N 点作平行于向量 $\boldsymbol{j}$ 的直线交向量 $\boldsymbol{i}$ 所在的直线于 P(图 5-1). 则 $\boldsymbol{v}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. 设 $\boldsymbol{v}$ 还可以表示成 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的另一种形式 $\boldsymbol{v}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}+z'\boldsymbol{k}$，那么 $(x-x')\boldsymbol{i}+(y-y')\boldsymbol{j}+(z-z')\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$. 由于 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 不共面，所以 $x=x',y=y',z=z'$. □

定义 5.3　设 $\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 是空间的一个以 O 为原

点的仿射坐标系(直角坐标系).规定 P 点的坐标为**向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标**,向量 $\overrightarrow{OP}$ 称为 P 点的定位向量或矢径.若 P 点的坐标为 (x,y,z),则记为 $P(x,y,z)$.

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 所在的直线通常称为**坐标轴**或分别称为 x,y,z 轴,每两根坐标轴所决定的平面称为**坐标平面**或 xOy,yOz,zOx 坐标平面.三个坐标平面把空间分割成八个部分,称为该坐标系的八个**卦限**,其中第一卦限的点对应的三个坐标符号为$+++$,第二卦限对应的坐标符号为$-++$,第三卦限对应的为$--+$,第四卦限对应的为$+-+$,第五卦限对应的为$++-$,第六卦限对应的为$-+-$,第七卦限对应的为$---$,第八卦限对应的为$+--$.

图 5-2 画出了直角坐标系的八个卦限.

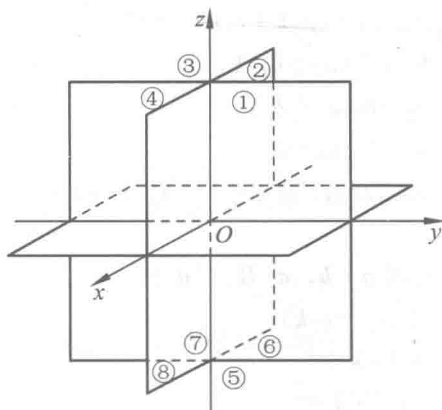


图　5-2

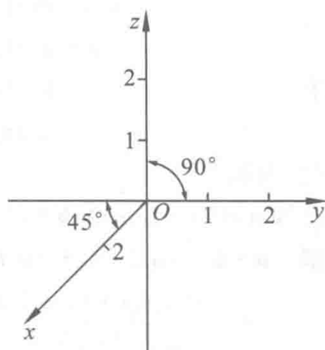


图　5-3

直角坐标系的画法(如图 5-3).我们通常将 y 轴画成水平线,向右为正向;z 轴画成竖直线,向上为正向;x 轴指向左下方,与水平线成 45°角.y 轴,z 轴上的单位长相同,x 轴上的单位长为 y 轴,z 轴上单位长的一半.

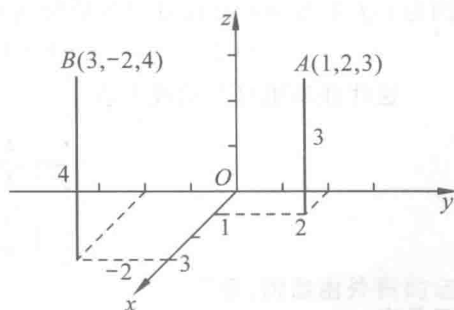


图　5-4

在直角坐标系中空间点的画法,例如点 $A(1,2,3)$,$B(3,-2,4)$的画法见图 5-4.

引进了向量的坐标以后,现在我们用坐标来进行向量的各种运算.

2. 直角坐标系中的向量运算

在本书以后的部分，如果没有特别说明，我们均假定所取的坐标系是右手直角坐标系.

(1)线性运算

已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 及 $\lambda\boldsymbol{a}$.

解 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，即 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$；$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，即

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}.$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})+(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{i})+(a_2\boldsymbol{j}+b_2\boldsymbol{j})+(a_3\boldsymbol{k}+b_3\boldsymbol{k})\\&=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3). \tag{5.1}$$

同理有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3). \tag{5.2}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3). \tag{5.3}$$

(2)内积

已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$ 及 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为两两互相垂直的单位向量，所以

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1,\ \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0.$$

这些性质也可归纳成下表：

·	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	1	0	0
$\boldsymbol{j}$	0	1	0
$\boldsymbol{k}$	0	0	1

于是有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3, \tag{5.4}$$

即二向量的内积等于它们的对应坐标的乘积之和.

因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$，所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}, \tag{5.5}$$

即向量的长度等于它的坐标的平方和的平方根.

因为 $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$,所以

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{5.6}$$

我们把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角 α,与 y 轴的夹角 β,与 z 轴的夹角 γ,叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**. $\boldsymbol{a}$ 的方向角的余弦叫做 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**.

因为 $\alpha=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}),\beta=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}),\gamma=\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k})$,所以由(5.6)式有

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\\ \cos\beta&=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}},\\ \cos\gamma&=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

可见 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的坐标,就是 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦,且向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1, \tag{5.8}$$

即任何向量的三个方向余弦的平方和等于1.

我们把与一个向量的三个方向余弦成比例的三个数,称为该向量的一组**方向数**.

由(5.7)式得到,一个向量的坐标,就是它的一组**方向数**.

(3)外积

已知 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

解　$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_1b_3\,\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+\\&\quad a_2b_1\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_2b_2\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+a_2b_3\,\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+\\&\quad a_3b_1\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_3b_3\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是两两互相垂直的单位向量,且 $(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$ 组成右手系,所以由外积的定义可知

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j},\\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}.\end{gathered}$$

这些性质可以归纳为下表:

$\times$	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{0}$

于是有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.$$

或者用行列式表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right). \tag{5.9}$$

(4)混合积

已知$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$. 求$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

解 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.

应用公式(5.9)及(5.4)得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}c_3,$$

即

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{5.10}$$

3. 距离公式和定比分点公式

下面介绍空间解析几何中的两个基本公式.

(1)距离公式

已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$及 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，求 P_1，P_2 两点间的距离$|P_1P_2|$.

解 P_1 与 P_2 的距离即线段 P_1P_2 的长度，用向量表示就是向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的模$|\overrightarrow{P_1P_2}|$. 而

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1},$$

由已知得$\overrightarrow{OP_1}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{OP_2}=(x_2,y_2,z_2)$,由(5.2)得

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1),$$

再由(5.5)即得

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

于是

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{5.11}$$

这就是**两点间的距离公式**.

(2)**定比分点公式**

已知 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$. 在 P_1P_2 上求一点 P,使 P 分线段 P_1P_2 成两个有向线段的量的比

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda \quad (\lambda\neq -1).$$

解 由第一章§1知定比分点公式的向量形式为

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OP_1}+\lambda\overrightarrow{OP_2}}{1+\lambda}.$$

已知$\overrightarrow{OP_1}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{OP_2}=(x_2,y_2,z_2)$. 设分点为 $P(x,y,z)$,即$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$. 应用公式(5.1)、(5.3)得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{5.12}$$

这就是**定比分点公式**(坐标形式).

于是我们有下列中点公式和重心公式:

以 $A(a_1,a_2,a_3)$ 和 $B(b_1,b_2,b_3)$ 为端点的线段 AB 的中点 M 的坐标为$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2},\frac{a_3+b_3}{2}\right)$.

以 $A(a_1,a_2,a_3)$,$B(b_1,b_2,b_3)$,$C(c_1,c_2,c_3)$为顶点的三角形的重心 G 的坐标为$\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3},\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$.

例1 已知 xy 面上的三点 $A(x_1,y_1,0)$,$B(x_2,y_2,0)$,$C(x_3,y_3,0)$,求$\triangle ABC$ 的面积.

解 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,0)$,

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(x_3-x_1,y_3-y_1,0)$.

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}$的绝对值.

这个结果也可以化成

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值.}$$ □

例 2 已知空间不共面四点 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$,求四面体 $ABCD$ 的体积.

解 因为混合积$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$的绝对值是以$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$为邻边构成的平行六面体的体积,等于四面体 $ABCD$ 的体积 V 的 6 倍,所以

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\text{的绝对值}$$

$$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}\text{的绝对值.}$$ □

例 3 用坐标证明双重外积公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

证 设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(x,y,z)$. 由(5.9)式,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

再应用(5.9)式得

$$x=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}c_3-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}c_2$$

$$=(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2$$

$$=(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_2c_2+b_3c_3)a_1$$

$$=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)a_1$$

$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_1.$$

同理可得

$$y=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_2,$$

$$z=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_3.$$

由这三式就得到所要证明的公式. □

习 题 五

1. 满足下列条件的空间点位于什么地方？

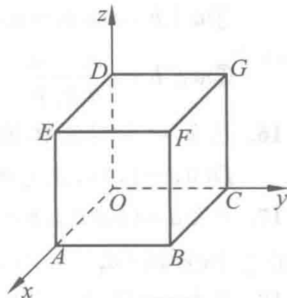
①$x=0$；②$y=0$；③$z=0$；④$x=0$ 且 $y=0$；⑤$y=0$ 且 $z=0$；⑥$z=0$ 且 $x=0$.

2. 已知空间一点 $P(a,b,c)$.

①求 P 点关于 xy 面的对称点 P_1，关于 yz 面的对称点 P_2，关于 zx 面的对称点 P_3；

②求 P 点关于 x 轴的对称点 P_4，关于 y 轴的对称点 P_5，关于 z 轴的对称点 P_6；

③求 P 点关于坐标原点的对称点 P_7.



（第 3 题图）

3. 边长为 1 的立方体（如图），取一个顶点为原点，过该顶点的三边在三个坐标轴上，求该立方体各顶点的坐标.

4. 作出下列各点：$A(3,2,-1)$，$B(3,2,1)$，$C(-3,-1,2)$，$D(-2,3,3)$，并指明它们各在第几卦限.

5. 在空间直角坐标系中，设任一点 P 的坐标为 (x,y,z)，求从 P 向各坐标轴及各坐标面所作垂线的垂足的坐标.

6. 设 $\boldsymbol{a}=(5,7,2)$，$\boldsymbol{b}=(3,0,4)$，$\boldsymbol{c}=(-6,1,1)$，求 $3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 和 $5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

7. 已知点 $A(1,2,4)$ 和 $B(0,-1,7)$，求 $\overrightarrow{AB}$.

8. 已知点 $A(2,0,-1)$ 和向量 $\overrightarrow{AB}=(1,4,5)$，求点 B 的坐标.

9. 已知三角形的三个顶点 $A(2,5,0)$，$B(11,3,8)$，$C(5,11,12)$，求边 AB 的长及 AB 边上的中线之长.

10. 已知 $\boldsymbol{a}=(3,5,6)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,3)$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$ 及 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.

11. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,3,1)$，$\boldsymbol{b}=(5,6,4)$，求 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为边的平行四边形的面积.

12. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,0)$，$\boldsymbol{c}=(-1,2,1)$，求

①$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

②$(3\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

③$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$；

④$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

13. 设点 C 分线段 AB 为 $5:2$，点 A 的坐标为 $(3,7,4)$，点 C 的坐标为 $(8,2,3)$，求点 B 的坐标.

14. 判断下列各组的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 是否共面？能否将 $\boldsymbol{c}$ 表示成 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的线性组合，

若能则写出表示式.

①$\boldsymbol{a}=(5,2,1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,4,2)$,$\boldsymbol{c}=(-1,-1,5)$;

②$\boldsymbol{a}=(6,4,2)$,$\boldsymbol{b}=(-9,6,3)$,$\boldsymbol{c}=(-3,6,3)$;

③$\boldsymbol{a}=(1,2,-3)$,$\boldsymbol{b}=(-2,-4,6)$,$\boldsymbol{c}=(1,0,5)$.

15. 已知二向量$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,试证:

①$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$;

②$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

16. 已知一个四面体的顶点为$A(1,2,0)$,$B(-1,3,4)$,$C(-1,-2,-3)$和$D(0,-1,3)$,求它的体积.

17. 已知$\boldsymbol{a}=(1,0,1)$,$\boldsymbol{b}=(4,-2,-2)$,$\boldsymbol{c}=(1,-1,2)$,$\boldsymbol{d}=(-2,1,1)$,求$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{d}$.

18. 已知$\boldsymbol{a}=(1,2,-3)$,求$\boldsymbol{a}$的方向余弦.

§6 平面方程

已知一个平面α.设$P_0(x_0,y_0,z_0)$是平面α上的一个定点.$\boldsymbol{N}$是与平面α垂直的一个非零向量(称为平面α的**法向量**).设$P(x,y,z)$是平面α上任一点(如图6-1),则总有$\overrightarrow{P_0P}$和$\boldsymbol{N}$垂直,因此

$$\boldsymbol{N}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0.$$

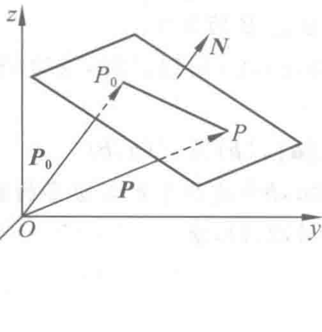


图 6-1

如果记$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{P}$,$\overrightarrow{OP_0}=\boldsymbol{P}_0$,则$\overrightarrow{P_0P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0$.于是,$\alpha$上的动点$P$的向径$\boldsymbol{P}$(也叫流动向量)满足

$$\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0)=0. \qquad (6.1)$$

反之,如果向量$\boldsymbol{P}$满足(6.1),则以$\boldsymbol{P}$为向径的点必落在平面α上.我们称方程(6.1)为平面α的方程.

方程(6.1)称为平面的**向量形式的点法式方程**,其中$\boldsymbol{N}$是平面的法向量,$\boldsymbol{P}_0$是平面上一个定点的向径,$\boldsymbol{P}$是平面上动点的向径.

我们可以把方程(6.1)写成坐标形式.

设$\boldsymbol{N}=(A,B,C)$，$\boldsymbol{P}_0=\overrightarrow{OP_0}=(x_0,y_0,z_0)$，$\boldsymbol{P}=\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$，代入(6.1)，得

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{6.2}$$

方程(6.2)称为平面的**坐标形式的点法式方程**，其中A,B,C是平面的法向量的坐标，x_0,y_0,z_0是平面上一个定点P_0的坐标，x,y,z是平面上动点P的坐标.

方程(6.2)可以化为

$$Ax+By+Cz+D=0, \tag{6.3}$$

这里$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，因此平面方程是三元一次方程.

现在，我们证明任意一个三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$$

都是某个平面的方程.

若能将(6.3)化成(6.2)的形式，那么它就是以(A,B,C)为法向量且过点(x_0,y_0,z_0)的平面的方程了.

不妨设$A\neq 0$，于是(6.3)可以化成

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)+By+Cz=0,$$

即

$$A\left[x-\left(-\frac{D}{A}\right)\right]+B(y-0)+C(z-0)=0.$$

这是形如(6.2)的方程，它表示以$\boldsymbol{N}=(A,B,C)$为法向量且过定点$\left(-\frac{D}{A},0,0\right)$的平面的方程.

因此我们有

定理 6.1　平面方程是三元一次方程，反之三元一次方程必表示平面.

方程(6.3)称为平面的**一般式方程**，或平面的**普通方程**.

平面的一般式方程(6.3)化成向量形式为

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{P}+D=0. \tag{6.3$'$}$$

现在我们来讨论，平面方程(6.3)的某些系数为零时，它所表示的平面对于坐标系来说有怎样的特殊位置.

1. $D=0$，方程(6.3)变成

$$Ax+By+Cz=0,$$

此时原点$(0,0,0)$满足方程，说明平面通过原点. 反之，若平面通过原点，则该平面的方程中常数项必为零.

2. $A=0$，方程(6.3)变成

$$By+Cz+D=0,$$

此时法向量$\boldsymbol{N}=(0,B,C)$与$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$垂直，说明平面平行于 x 轴. 特别地如果 $A=0,D=0$ 则平面 $By+Cz=0$ 过 x 轴.

同理，$B=0$ 时，平面 $Ax+Cz+D=0$ 平行于 y 轴. $B=0$，且 $D=0$ 时，平面 $Ax+Cz=0$ 过 y 轴.

$C=0$ 时，平面 $Ax+By+D=0$ 平行于 z 轴. $C=D=0$ 时，平面 $Ax+By=0$ 过 z 轴.

3. $A=0,B=0$，方程(6.3)变成

$$Cz+D=0,$$

此时法向量 $\boldsymbol{N}=(0,0,C)$与$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$平行，说明平面平行于 xy 面. 特别地，如果 $A=B=D=0$，则平面 $z=0$ 即为 xy 面.

同理，$B=C=0$ 时，平面 $Ax+D=0$ 平行于 yz 面. $B=C=D=0$，平面 $x=0$ 即为 yz 面；

$A=C=0$ 时，平面 $By+D=0$ 平行于 zx 面. $A=C=D=0$ 时，平面 $y=0$ 即为 zx 面.

例 1 已知一平面过点$(1,-2,0)$，法向量 $\boldsymbol{N}=(4,5,-3)$，求这个平面的方程.

解 根据(6.2)，所求平面方程为

$$4(x-1)+5(y+2)-3(z-0)=0,$$

即

$$4x+5y-3z+6=0.$$

□

例 2 求过已知点$(4,5,-3)$且平行于 xy 面的平面.

解法一 所求平面的法向量 $\boldsymbol{N}$ 应与 xy 面垂直，取 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，根据(6.2)，所求平面方程为

$$0(x-4)+0(y-5)+1(z+3)=0,$$

即

$$z+3=0.$$

解法二 因为所求的平面平行于 xy 面，故可设所求方程为

$$Cz+D=0 \quad (C\neq 0).$$

因为过点$(4,5,-3)$，所以有

$$-3C+D=0,$$

即$\dfrac{D}{C}=3$，于是，所求方程为

$$z+3=0.$$

□

例 3 求过三点$(a,0,0)$，$(0,b,0)$，$(0,0,c)$$(abc\neq 0)$的平面方程.

解 设所求平面方程为

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (*)$$

因为平面过点$(a,0,0)$，所以有

$$Aa+D=0,$$

于是

$$A=-\frac{D}{a};$$

因为平面过点$(0,b,0)$，所以有

$$Bb+D=0,$$

于是

$$B=-\frac{D}{b};$$

因为平面过点$(0,0,c)$，所以有

$$Cc+D=0,$$

于是

$$C=-\frac{D}{c}.$$

代入(*)得

$$-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0,$$

即

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \qquad (6.4)\square$$

方程(6.4)中的 a,b,c 称为这个平面在三个坐标轴上的**截距**(如图 6-2)，方程(6.4)称为平面方程的**截距式**. 凡所有系数皆不为零的平面方程，都可以化成截距式. 从平面方程的截面式(6.4)立即可以看出该平面与三个坐标轴的交点.

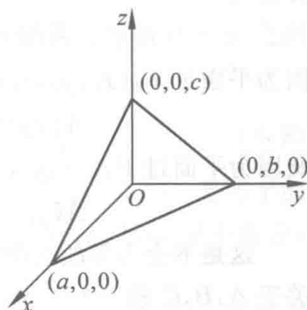


图 6-2

例如，方程

$$x+2y+3z-6=0,$$

用 6 去除各项，得

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1.$$

立即可知该平面与三个坐标轴的交点分别为$(6,0,0)$，$(0,3,0)$，$(0,0,2)$. 该平面的图形通常表示为图 6-3.

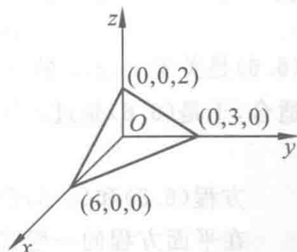


图 6-3

例 4 已知有不共线的三点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$，$P_3(x_3,y_3,z_3)$，求过这三点的平面方程.

解法一 由外积的定义，$\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}$同时垂直于$\overrightarrow{P_1P_2}$及$\overrightarrow{P_1P_3}$，即垂直于由 P_1,P_2,P_3 决定的平面

α(如图 6-4),因此可以取它为平面 α 的一个法向量 $\boldsymbol{N}$,即取

$$\boldsymbol{N}=\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}.$$

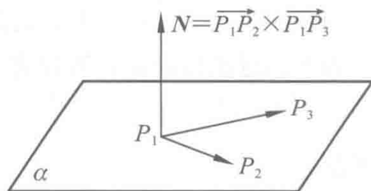


图 6-4

于是所求平面 α 的方程即为过 P_1 点且以上述 $\boldsymbol{N}$ 为法向量的平面方程

$$\boldsymbol{N}\cdot\overrightarrow{P_1P}=0,$$

即
$$(\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3})\cdot\overrightarrow{P_1P}=0,$$

亦即

$$(\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P})=0. \tag{6.5}$$

用坐标表示,所求的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{6.6}$$

解法二 设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{N}=(A,B,C)$,根据(6.2),则所求的平面方程为

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0.$$

因为平面过 $P_2(x_2,y_2,z_2)$,所以有

$$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1)=0.$$

又因为平面过 $P_3(x_3,y_3,z_3)$,所以有

$$A(x_3-x_1)+B(y_3-y_1)+C(z_3-z_1)=0.$$

这是不全为零的三个数 A,B,C 所应满足的三个关系式,它们可以看成是关于 A,B,C 的一个三元一次齐次方程组,它有非零解的充要条件是系数行列式为零,即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \tag{6.6}$$

(6.6)是关于 x,y,z 的一次方程,且为 (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2) 及 (x_3,y_3,z_3) 所适合,于是(6.6)是过已知三点 P_1,P_2,P_3 的平面方程,即为所求的平面方程.

□

方程(6.5)和(6.6)分别称为平面方程**三点式**的向量形式和坐标形式.

在平面方程的一般式(6.3)中,由于 A,B,C 不能同时为零,不妨假定 $A\neq 0$,则(6.3)化为

$$x+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0,$$

或

$$x+\alpha y+\beta z+\gamma=0. \qquad ①$$

要确定方程(6.3),只要确定方程①就行了.而方程①中只包含三个待定系数α,β,γ,但每确定一个系数需要一个代数关系式(称为一个(代数)条件),因此我们得到:三个(代数)条件决定一个平面方程.

现在我们从二已知平面的方程来讨论它们的位置关系.

已知两个平面

$$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad (*)$$

$$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad (**)$$

问在怎样的条件下,它们①重合?②平行?③垂直?

当方程(*)和(**)的各个对应系数成比例时,即

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}, \qquad (6.7)$$

此时方程(*)和(**)是同解方程,它们实际上表示同一个平面,即α_1与α_2重合.上述条件(6.7)对于α_1与α_2重合也是必要的.

当方程(*)和(**)中的x,y,z的对应系数成比例而与常数项不成比例时,即

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}, \qquad (6.8)$$

此时因为A_1,B_1,C_1是与平面α_1垂直的法向量$\boldsymbol{N}_1$的坐标,A_2,B_2,C_2是与平面α_2垂直的法向量$\boldsymbol{N}_2$的坐标,上述关系式(6.8)说明$\boldsymbol{N}_1/\!/\boldsymbol{N}_2$,$\alpha_1$与$\alpha_2$又不重合,所以$\alpha_1/\!/\alpha_2$;上述条件(6.8)对于$\alpha_1/\!/\alpha_2$也是必要的.

当方程(*)和(**)中的x,y,z的对应系数乘积之和为零时,即二平面方程的系数满足关系式:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0, \qquad (6.9)$$

这个关系式说明平面α_1的法向量$\boldsymbol{N}_1$垂直于平面α_2的法向量$\boldsymbol{N}_2$,所以平面$\alpha_1\perp\alpha_2$.上述条件(6.9)对于$\alpha_1\perp\alpha_2$也是必要的.

于是我们有

定理 6.2 已知两个平面

$$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

则

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0;$$

$$\alpha_1 /\!/ \alpha_2(\text{不重合}) \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2};$$

$$\alpha_1 \text{ 与 } \alpha_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

定义 6.1　两个平面的夹角是指它们的法向量之间的夹角或其补角(这与立体几何中定义两个平面的夹角是两个平面所交成的两个二面角之一的平面角是一致的,见图 6-5).

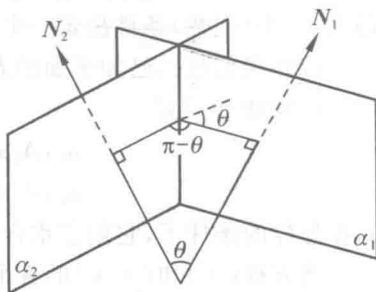


图　6-5

于是我们得到两个平面的夹角的下列计算公式:

设两个平面

$$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的夹角为 θ,则有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{N}_1\cdot\boldsymbol{N}_2}{|\boldsymbol{N}_1||\boldsymbol{N}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}. \tag{6.10}$$

习　题　六

1. 已知两点 $A(a_1,a_2,a_3)$ 及 $B(b_1,b_2,b_3)$,求满足下列条件的平面.

①过点 A 且与直线 AB 垂直;

②过点 B 且与直线 AB 垂直.

2. 由原点作平面的垂线,已知垂足的坐标是(a,b,c),求这个平面的方程.

3. 求过定点(a,b,c)且分别满足下列条件的平面.

①与 yz 面平行;　②过 x 轴.

4. 求过两个定点(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)且分别满足下列条件的平面.

①平行于 z 轴;　②垂直于 zx 面.

5. 求过定点(a,b,c)且在 x 轴和 y 轴的截距分别是 a 和 b 的平面方程.

6. 求过两个定点(x_1,y_1,z_1)和(x_2,y_2,z_2)且在 x 轴上的截距是 a 的平面方程.

7. 求过点$(1,0,3)$,$(2,-1,2)$及$(4,-3,7)$的平面方程.

8. 求过点$(2,4,3)$且平行于向量$(0,2,4)$及$(-1,-2,1)$的平面方程.

9. 求过点 $A(3,1,1)$ 及 $B(1,0,-1)$,且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(-1,0,2)$ 的平面方程.

10. 如果 $abcd\neq 0$,求出由各个坐标面与平面

$$ax+by+cz+d=0$$

围成的四面体的体积.

11. 已知两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$及 $P_2(x_2,y_2,z_2)$,求一平面,使 P_1,P_2 关于这个平面为对称.

12. 设平面 $\alpha:Ax+By+Cz+D=0$ 与连接两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的线段相交于 M,且$\overrightarrow{M_1M}=k\overrightarrow{MM_2}$,证明

$$k=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}.$$

§7　空间直线方程

现在来建立过定点且与定方向平行的直线的方程.

已知定点 P_0,定方向用非零向量$\boldsymbol{S}$表示.设 P 为过 P_0 且平行于$\boldsymbol{S}$的直线 l 上的动点,则有

$$\overrightarrow{P_0P}\,/\!/\,\boldsymbol{S},$$

于是有$\overrightarrow{P_0P}=t\boldsymbol{S}$.($t$ 为参数)

如果记　$\overrightarrow{OP_0}=\boldsymbol{P}_0$,$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{P}$,则有

$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0=t\boldsymbol{S},$$

或

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}. \tag{7.1}$$

这就是空间直线 l 的方程.$\boldsymbol{S}$称为 l 的**方向向量**,P_0 是直线 l 上一个定点的向径,$\boldsymbol{P}$ 为直线 $\boldsymbol{l}$ 上动点的向径,t 为**参数**.

若 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,z_0)$,$\boldsymbol{S}=(l,m,n)$,设动点 $P(x,y,z)$,则(7.1)的坐标形式为

$$\begin{cases}x=x_0+tl,\\ y=y_0+tm, \quad (-\infty<t<+\infty)\\ z=z_0+tn.\end{cases} \tag{7.2}$$

方程(7.1)及(7.2)分别称为直线 l 的**向量形式的参数方程**和**坐标形式的参数方程**.

特别地,当方向向量$\boldsymbol{S}$是单位向量时,参数 t 有几何意义,此时$|t|$是定点 P_0 到动点 P 的距离.

从直线的参数方程(7.2)中消去参数 t,我们得到

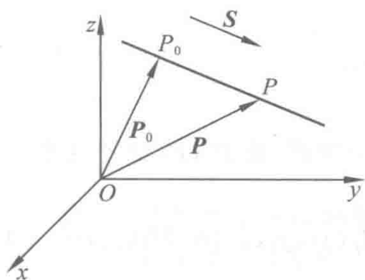


图 7-1

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (7.3)$$

(7.3)称为直线方程的**标准式**(或**对称式**,**点向式**). 注意到方向向量$\boldsymbol{S}$是非零向量,所以 l,m,n 不能同时为零. 若 l,m,n 中有一个或两个为零时,我们仍把直线方程写成(7.3)式的形式,但我们约定:当分母为零时,表示分子亦为零. 例如当 $l=0$ 时,

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

表示

$$x-x_0=0,\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n};$$

当 $l=m=0$ 时,

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{n}$$

表示

$$x-x_0=0,y-y_0=0.$$

方程(7.3)中当 l,m,n 有一个或两个是零时,方程表示的直线对于坐标系有怎样的特殊位置呢?

1. 当 $l=0$ 时,即$\boldsymbol{S}=(0,m,n)$,则有$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{i}=0,\boldsymbol{S}\perp\boldsymbol{i}$,即直线垂直于 x 轴,直线与 yz 面平行.

同理,$m=0$ 时,直线与 zx 面平行;$n=0$ 时,直线与 xy 面平行.

2. 当 $l=m=0$ 时,即$\boldsymbol{S}=(0,0,n)$,则有$\boldsymbol{S}/\!/\boldsymbol{k}$,即直线平行于$z$ 轴.

同理,$m=n=0$ 时,直线平行于 x 轴;$l=n=0$ 时,直线平行于 y 轴.

方程(7.3)包含三个等式,但由其中任何两个等式都可推导出第三个等式,因此(7.3)也可以写成联立方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m},\\[2mm]\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n},\end{cases}$$

其中每一个方程都是三元一次方程,都表示一个平面,从而可以把直线看成是这两个平面的交线. 因此,任何直线都可以表示成两个平面的交线,即它的方程都可由如下形式的联立方程组

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\tag{7.4}$$

给出；反过来，任何由两个独立的三元一次方程所组成的相容的方程组(7.4)都是某条直线的方程，即这两个三元一次方程所表示的平面的交线的方程.

我们把方程组(7.4)称为**直线方程的一般式**或称为**直线的普通方程**.

现在我们来求由(7.4)给出的直线的标准式方程. 为此只要找出该直线上的一个定点 P_0 及它的方向向量$\boldsymbol{S}$即可. 凡满足方程组(7.4)的每一点都可取作 P_0，这样的点有无限多个. 为计算方便起见，我们取(7.4)与某个坐标面的交点为 P_0(因为(7.4)不可能与三个坐标面都不交). 又因为两个平面的交线必与二平面的法向量皆垂直，(7.4)中二平面的法向量为$\boldsymbol{N}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\boldsymbol{N}_2=(A_2,B_2,C_2)$，因此，它们的交线的方向向量$\boldsymbol{S}$可以取为与$\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2$ 共线的一个向量. 有了点 P_0 和方向向量$\boldsymbol{S}$，于是可以写出它的标准式方程.

例 1 已知直线的普通方程为

$$\begin{cases}2x-3y-z+4=0,\\4x-6y+5z-1=0,\end{cases}$$

求它的标准式方程.

解 这两个平面的法向量分别为

$$\boldsymbol{N}_1=(2,-3,-1),\boldsymbol{N}_2=(4,-6,5),$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}_1\times\boldsymbol{N}_2&=\left(\begin{vmatrix}-3&-1\\-6&5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&2\\5&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&-3\\4&-6\end{vmatrix}\right)\\&=(-21,-14,0)\end{aligned}$$

取 $\boldsymbol{S}=(3,2,0)$为已知直线的一个方向向量.

为求直线与 yz 面的交点，用 $x=0$ 代入已知方程得

$$\begin{cases}-3y-z+4=0,\\-6y+5z-1=0.\end{cases}$$

解得 $y=\dfrac{19}{21}$，$z=\dfrac{9}{7}$，得到所求交点为$\left(0,\dfrac{19}{21},\dfrac{9}{7}\right)$.

于是所求标准式方程为

$$\frac{x}{3}=\frac{y-\frac{19}{21}}{2}=\frac{z-\frac{9}{7}}{0}.$$

□

例 2 已知直线通过两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$及 $P_2(x_2,y_2,z_2)$，求这个直线的向量方程，并写出它的标准式方程.

解 可取$\overrightarrow{P_1P_2}$为该直线的一个方向向量. 记$\overrightarrow{OP}_1=\boldsymbol{P}_1$, $\overrightarrow{OP}_2=\boldsymbol{P}_2$, 于是$\overrightarrow{P_1P_2}=\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$. 设直线上动点 $P(x,y,z)$, 记$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{P}$, 于是有$\overrightarrow{P_1P}=\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1=t\,\overrightarrow{P_1P_2}$, 亦即

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1), \tag{7.5}$$

这就是所求直线的向量方程. 它的标准式方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{7.6}$$

□

方程(7.5)和(7.6)分别称为**向量形式的和坐标形式的直线方程的两点式.**

例 3 求直线

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-5}$$

与平面

$$x+2y+3z+1=0$$

的交点.

解 令$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{-5}=t$, 得

$$x=1+2t,\quad y=-1+3t,\quad z=2-5t. \tag{$*$}$$

代入平面方程, 整理得 t 的一次方程

$$6-7t=0,$$

解得 $t=\frac{6}{7}$. 代入($*$)式得交点$\left(\frac{19}{7},\frac{11}{7},\frac{-16}{7}\right)$. □

注: 求直线与平面的交点时, 通常把直线方程化成参数式, 因为一元一次方程最容易解.

现在我们从两条已知直线的方程来讨论它们的位置关系.

定义 7.1 直线的方向向量之间的夹角或它的补角, 叫做这**两条直线的夹角.**

已知二直线 l_1 和 l_2 的标准式方程为

$$l_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$l_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

可知它们的方向向量分别为$\boldsymbol{S}_1=(l_1,m_1,n_1)$和$\boldsymbol{S}_2=(l_2,m_2,n_2)$. 设 l_1 与 l_2 的夹角之一为 θ, 由定义得

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2}{|\boldsymbol{S}_1||\boldsymbol{S}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{7.7}$$

于是我们得到

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{S}_1\perp\boldsymbol{S}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2=0\Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

$$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow\boldsymbol{S}_1/\!/\boldsymbol{S}_2\Leftrightarrow\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.$$ ①

当 l_1 与 l_2 的方向向量平行时，如若 l_1,l_2 再有公共点，则 l_1 与 l_2 重合，于是得到

$$l_1\text{ 与 }l_2\text{ 重合}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2},\\ \dfrac{x_1-x_2}{l_2}=\dfrac{y_1-y_2}{m_2}=\dfrac{z_1-z_2}{n_2}.\end{cases}$$

（第 2 个条件说明 l_1 上的点 (x_1,y_1,z_1) 也在 l_2 上.）

习　题　七

1. 求下列直线方程.

①过点 $(1,0,-2)$ 且平行于 $\boldsymbol{S}=(4,2,-3)$；

②过点 $(0,2,3)$ 且垂直于平面 $2x+3y=0$；

③过两点 $(1,0,-2)$ 及 $(0,2,3)$.

2. 已知 $P(1,1,1)$.

①求过 P 及原点的直线方程；

②过 P 且分别与各坐标轴平行的各直线的方程.

3. 化下列方程为标准式：

① $\begin{cases}x+y+z=3,\\3x-3y+5z=5;\end{cases}$　② $\begin{cases}x=3z-5,\\y=2z-3.\end{cases}$

4. 判定下列各组直线是否平行，是否垂直？

① $\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{1}$ 和 $\begin{cases}x+y-z=0,\\x-y-5z-8=0;\end{cases}$

② $\begin{cases}x=5+2t,\\y=2-t,\\z=-7+t\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x+3y+z+2=0,\\x-y-3z-2=0.\end{cases}$

---

① 这里说的平行是广义的，也包含重合，故平行而不重合的充要条件应该再加上“$\dfrac{x_1-x_2}{l_2}$，$\dfrac{y_1-y_2}{m_2}$，$\dfrac{z_1-z_2}{n_2}$ 不全相等”.

5. 求直线$\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{2}$上一点(3,4,5)到此直线与平面 $x+y+z=2$ 的交点的距离.

6. 当系数 D 取何值时,才能使直线

$$\begin{cases}3x-y+2z-6=0,\\x+4y-z+D=0\end{cases}$$

与 z 轴相交?

7. 当系数 B 和 D 取何值时,才能使直线

$$\begin{cases}x-2y+z-9=0,\\3x+By+z+D=0\end{cases}$$

落在 xy 面上?

8. 说明以下诸直线对于坐标系的位置(出现的系数皆不为零):

① $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=0,\\A_2x+B_2y+C_2z=0;\end{cases}$ ② $\begin{cases}A_1x+D_1=0,\\B_2y+D_2=0;\end{cases}$

③ $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\B_2y+D_2=0;\end{cases}$ ④ $\begin{cases}B_1y+C_1z+D_1=0,\\B_2y+C_2z+D_2=0;\end{cases}$

⑤ $\begin{cases}A_1x+C_1z=0,\\A_2x+C_2z=0;\end{cases}$ ⑥ $\begin{cases}B_1y+C_1z=0,\\A_2x+D_2=0.\end{cases}$

9. 设直线

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

就下列情形分别推求各系数所应适合的充要条件:

①过原点;②和 x 轴平行;③和 y 轴相交;④和 z 轴重合.

§8 平面与直线的有关问题

1. 直线与平面的位置关系

已知直线 l 和平面 α 的方程为

$$l:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

$$\alpha:Ax+By+Cz+D=0.$$

现在我们来讨论①$l\perp\alpha$,②$l/\!/\alpha$,③l 在 α 上的充要条件.

因为直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{S}=(l,m,n)$ 与直线 l 平行,平面 α 的法向量 $\boldsymbol{N}=(A,B,C)$ 与平面 α 垂直,所以有

$$① \ l\perp\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{S}/\!/\boldsymbol{N} \Leftrightarrow \frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}. \tag{8.1}$$

$$② \ l/\!/\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{S}\perp\boldsymbol{N} \Leftrightarrow lA+mB+nC=0. \text{①} \tag{8.2}$$

如果 $\boldsymbol{S}\perp\boldsymbol{N}$ 时,l 和 α 又有公共点,则 l 就整个落在 α 上了.因此有

$$③ \ l \text{ 在 } \alpha \text{ 上}^{②} \Leftrightarrow \begin{cases} lA+mB+nC=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0, \end{cases} \tag{8.3}$$

(第 2 个条件说明 l 上的点(x_0,y_0,z_0)也在 α 上.)

定义 8.1 设直线 l 和平面 α 的交角为 θ.当 $l/\!/\alpha$ 时,$\theta=0$;当 $l\perp\alpha$ 时,$\theta=\frac{\pi}{2}$;其他情况下,θ 等于 l 与它在 α 上的射影直线 l'所交的锐角.

设 φ 是 l 的方向向量 $\boldsymbol{S}$ 与 α 的法向量 $\boldsymbol{N}$ 之间的夹角,则有 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$(如图 8-1①)或 $\varphi=\frac{\pi}{2}+\theta$(如图 8-1②).于是

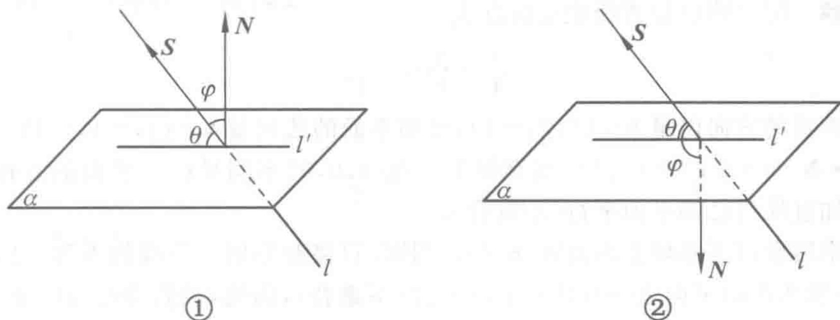


图 8-1

$$\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,$$

---

① 这里说的平行是广义的,包括 l 落在 α 上的情形,若不包括 l 落在 α 上的情形,$l/\!/\alpha$的充要条件应为

$$\begin{cases} lA+mB+nC=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0. \end{cases} \tag{8.4}$$

② 有时也称直线 l 落在平面 α 上的情形为直线 l 与平面 α 重合.

或 $$\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta.$$

因此在这两种情况下，都有 $\sin\theta=|\cos\varphi|=\dfrac{|\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}|}{|\boldsymbol{S}||\boldsymbol{N}|}$.

于是我们有

定理 8.1 已知直线 l 和平面 α 的方程为

$$l:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

$$\alpha:Ax+By+Cz+D=0.$$

设 l 和 α 的交角为 θ，则

$$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}|}{|\boldsymbol{S}||\boldsymbol{N}|}=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{8.5}$$

例 1 判定下列直线和平面的位置关系. 若相交，求它们的交点和交角.

① 直线 $\begin{cases}x+y+3z=0,\\ x-y-z=0\end{cases}$ 与平面 $x-y-z+1=0$；

② 直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{6}$ 与平面 $x-2y+z-1=0$.

解 ① 将已知直线化成标准式

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}.$$

已知直线的方向向量 $\boldsymbol{S}=(1,2,-1)$，已知平面的法向量 $\boldsymbol{N}=(1,-1,-1)$，于是有 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}=1-2+1=0$. 又已知直线上一点 $(0,0,0)$ 不满足已知平面的方程，所以已知直线与已知平面平行(不重合).

本题也可不必如上用公式(8.4)来判断. 直接观察所给直线的方程，可以发现，直线所在的平面之一与已知平面平行(不重合)，因此，该直线必与已知平面平行(不重合).

② 已知直线的方向向量 $\boldsymbol{S}=(2,3,6)$，已知平面的法向量 $\boldsymbol{N}=(1,-2,1)$，$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}=2-6+6\neq0$，即所给直线与平面不平行，故必相交. 为求交点，先将直线方程化成参数式.

令 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-2}{6}=t$，得 $x=1+2t,y=3t,z=2+6t$，代入平面方程，解得 $t=-1$，故交点为 $(-1,-3,-4)$.

设交角为 θ，则由定理 8.1 有

$$\sin\theta=|\cos\angle(\boldsymbol{S},\boldsymbol{N})|=\frac{|\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{N}|}{|\boldsymbol{S}||\boldsymbol{N}|},$$

即
$$\sin\theta=\frac{|2-6+6|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{7\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{21},$$
$$\theta=\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{21}\right)\approx 6°42'.$$ □

例 2 求从原点到直线
$$l:\begin{cases}x+2y+3z+4=0,\\2x+3y+4z+5=0\end{cases}$$
的垂线和垂足.

解 如能求出过原点与直线 l 垂直的平面 α,则 l 与 α 的交点即为所求垂足,原点与垂足的连线即为所求垂线.

因为 $\alpha\perp l$,所以 l 的方向向量 $\boldsymbol{S}$ 就是 α 的法向量 $\boldsymbol{N}$.

已知 l 的方向向量 $\boldsymbol{S}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\3&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\4&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}\right)=(-1,2,-1)$,故过原点以 $\boldsymbol{N}=(-1,2,-1)$ 为法向量的平面 α 的方程为
$$-x+2y-z=0.$$
将它和 l 的方程联立,解得交点 $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$ 即为垂足. 该点和原点的连线
$$\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{-\frac{1}{3}}=\frac{z}{-\frac{4}{3}}$$
即
$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-4},$$
就是所求垂线. □

2. 二直线共面的条件

我们现在来讨论已知二直线
$$l_1:\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1, \qquad (*)$$
$$l_2:\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2 \qquad (**)$$
共面的条件. 首先要注意直线共面与向量共面之间的区别:几个向量共面与否,是将它们移到同一始点以后考查的,而直线却不能移动.

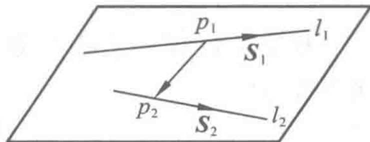


图 8-2

方程$(*)$表示直线 l_1 过定点 P_1 且与定向量 $\boldsymbol{S}_1$ 平行,$(**)$表示直线 l_2 过定点 P_2 与

定向量 $\boldsymbol{S}_2$ 平行. 如果 l_1 与 l_2 同在一个平面上,则有$\overrightarrow{P_1P_2}$,$\boldsymbol{S}_1$,$\boldsymbol{S}_2$ 三向量共面(如图 8-2). 反过来,若$\overrightarrow{P_1P_2}$,$\boldsymbol{S}_1$,$\boldsymbol{S}_2$ 三向量共面,则 l_1,l_2 在同一个平面上. 而三向量共面的充要条件是三向量的混合积为零. 因此我们有

定理 8.2 二直线

$$l_1:\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1, \tag{$*$}$$

$$l_2:\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2 \tag{$**$}$$

共面的充要条件是

$$(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)=0. \tag{8.6}$$

若 l_1,l_2 用对称式表示,即

$$l_1:\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \tag{$*$}'$$

$$l_2:\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \tag{$**$}'$$

则 l_1,l_2 共面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \tag{8.7}$$

若二直线不在同一平面上,则称二直线为**异面直线**. 因此我们有

推论 8.1 若二直线 l_1 及 l_2 的方程为($*$)和($**$),则 l_1 与 l_2 异面的充要条件为

$$(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)\neq 0.$$

若 l_1,l_2 的方程为($*$)′及($**$)′,则 l_1 与 l_2 异面的充要条件为

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

二直线共面而不平行时必相交,再注意到 §7 中二直线平行的充要条件,我们有

推论 8.2 若二直线 l_1 和 l_2 的方程为($*$)及($**$),则 l_1 与 l_2 相交的充要条件为

$$\begin{cases} (\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)=0, \\ \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2\neq\boldsymbol{0}. \end{cases} \tag{8.8}$$

若二直线 l_1,l_2 的方程为($*$)′及($**$)′,则 l_1 与 l_2 相交的充要条件为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ l_1 & m_1 & n_1\\ l_2 & m_2 & n_2\end{vmatrix}=0, \\ \dfrac{l_1}{l_2},\dfrac{m_1}{m_2},\dfrac{n_1}{n_2}\text{，不全相等.}\end{cases} \tag{8.9}$$

例 3 证明二直线

$$l_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{8}=\frac{z-5}{-3},$$

$$l_2: \frac{x-3}{4}=\frac{y-21}{5}=\frac{z+11}{-10}$$

相交，并求交点坐标.

解 l_1 过 $P_1(1,0,5)$，方向向量为 $\boldsymbol{S}_1=(-1,8,-3)$. l_2 过 $P_2(3,21,-11)$，方向向量为 $\boldsymbol{S}_2=(4,5,-10)$. 因为

$$\begin{vmatrix}3-1 & 21-0 & -11-5\\ -1 & 8 & -3\\ 4 & 5 & -10\end{vmatrix}=0,$$

所以根据(8.7)，l_1 与 l_2 共面. 又 $\dfrac{-1}{4}\neq\dfrac{8}{5}\neq\dfrac{-3}{-10}$，所以 l_1 与 l_2 相交.

为求交点，把两个直线方程化成参数式，

$$l_1:\begin{cases}x=1-t_1,\\ y=8t_1,\\ z=5-3t_1,\end{cases}\qquad l_2:\begin{cases}x=3+4t_2,\\ y=21+5t_2,\\ z=-11-10t_2.\end{cases}$$

l_1 与 l_2 的交点的坐标应满足

$$\begin{cases}1-t_1=3+4t_2,\\ 8t_1=21+5t_2,\\ 5-3t_1=-11-10t_2.\end{cases}$$

解得 $t_1=2, t_2=-1$. 将 $t_1=2$ 代入 l_1 的参数方程(或将 $t_2=-1$ 代入 l_2 的参数方程)即得交点 $(-1,16,-1)$. □

例 4 一直线通过点 $(2,6,3)$，与平面 $\alpha: x-2y+3z-5=0$ 平行，且和直线 $l_1: \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-2}{-8}=\dfrac{z-6}{2}$ 相交，求此直线方程.

解 设所求过点 $(2,6,3)$ 的直线 l 的方程为

$$\frac{x-2}{l}=\frac{y-6}{m}=\frac{z-3}{n}, \tag{①}$$

此处 l,m,n 为待定系数.

因为 l 与 α 平行,所以由(8.2)有

$$l-2m+3n=0. \quad ②$$

又因为 l 与 l_1 相交,所以 l 与 l_1 共面. 由(8.7)有

$$\begin{vmatrix} 2-2 & 6-2 & 3-6 \\ -5 & -8 & 2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,$$

即

$$16l-15m-20n=0. \quad ③$$

由②,③解得 $l=5n, m=4n$.

若取 $n=1$,则 $l=5, m=4$,代入①得所求直线方程为

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-6}{4}=\frac{z-3}{1}.$$

□

3. 平面束

定义 8.2 通过一条定直线的所有平面的全体,称为一个**平面束**,定直线叫**平面束的轴**.

定理 8.3 以二相交平面

$$\alpha_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\alpha_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线 l 为轴的平面束的方程是

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \quad (8.10)$$

这里 λ,μ 是不同时为零的任意实数,称为参数.

证 1° 对于任意一组不同时为零的参数值 λ,μ,方程(8.10)表示一个平面.

将方程(8.10)改写为

$$(\lambda A_1+\mu A_2)x+(\lambda B_1+\mu B_2)y+(\lambda C_1+\mu C_2)z+(\lambda D_1+\mu D_2)=0, \quad (8.10)'$$

而(8.10)′中 x,y,z 的系数不同时为零,否则

$$\lambda A_1+\mu A_2=0, \quad \lambda B_1+\mu B_2=0, \quad \lambda C_1+\mu C_2=0,$$

设 $\lambda\neq 0$,则有

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=-\frac{\mu}{\lambda},$$

而这与题设 α_1,α_2 相交矛盾了,所以(8.10)′(即 8.10)确是三元一次方程,表示平面.

2° 对于任意一组不同时为零的参数值 λ,μ,方程(8.10)表示的平面过 α_1 与

α_2 的交线 l.

因为 α_1,α_2 交线 l 上任一点的坐标必满足 α_1 及 α_2 的方程,因而也必满足方程(8.10),从而 l 必在方程(8.10)所表示的平面上.

3° 通过交线 l 的任一个平面 α,都可以通过选取适当的 λ,μ 值用方程(8.10)表示.

设在平面 α 上但不在交线 l 上任取一点 $P(\alpha,\beta,\gamma)$,因为 P 不在 l 上,所以 $A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1$ 与 $A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+D_2$ 不能同时为零. 如果 $A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+D_2\neq0$,可取

$$\frac{\mu}{\lambda}=-\frac{A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1}{A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+D_2}.$$

把满足这个关系的一组 λ,μ 值代入方程(8.10)得

$$(A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+D_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)-$$
$$(A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

显然这个方程既通过 l 又通过 P 点,即为平面 α 的方程.

特别地,当 $\alpha=\alpha_1$ 时,可以选取 $\lambda=1,\mu=0$;当 $\alpha=\alpha_2$ 时,可以选取 $\lambda=0,\mu=1$. □

注:为了计算方便,有时也把上述平面束的方程写成

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \tag{8.11}$$

它只含有一个参数 λ,所以计算方便. 但要注意,不管 λ 取何值,方程(8.11)都不能表示平面

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

即(8.11)决定的平面的全体比(8.10)决定的平面束少了一个平面 α_2.

例 5 求过直线 $\begin{cases}2x-y+2z=0,\\x+2y-2z-6=0,\end{cases}$ 且与 xy 面垂直的平面.

解 过二平面 $2x-y+2z=0,x+2y-2z-6=0$ 的交线的平面方程可设为

$$\lambda(2x-y+2z)+\mu(x+2y-2z-6)=0, \quad ①$$

即

$$(2\lambda+\mu)x+(-\lambda+2\mu)y+(2\lambda-2\mu)z+(-6\mu)=0. \quad ②$$

该平面的法向量 $\boldsymbol{N}=((2\lambda+\mu),(-\lambda+2\mu),(2\lambda-2\mu))$. 由题设该平面与 xy 面垂直,得 $\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{k}=0$,即 $2\lambda-2\mu=0$. 解得 $\lambda=\mu$. 取 $\lambda=1$,则 $\mu=1$.

代入①或②即可得所求平面方程

$$3x+y-6=0.$$ □

习 题 八

1. 求直线

$$\begin{cases}3x+2y-4z-12=0,\\ x+4y-2z-10=0\end{cases}$$

在各坐标平面上的投影平面方程(即通过该直线与各坐标面垂直的平面方程).

2. 求过直线

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

且平行于直线

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

的平面方程.

3. 求过直线

$$\begin{cases}2x-y-2z+1=0,\\ x+y+4z-2=0,\end{cases}$$

并在 y 轴和 z 轴上有相同的非零截距的平面方程.

4. 求下列直线方程:

①过点$(2,-1,3)$与$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{2}$垂直相交;

②过点$(1,0,-2)$与平面 $3x-y+2z+1=0$ 平行,与直线$\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z}{1}$相交;

③过点$(11,9,0)$与$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}$和$\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$都相交.

5. 判断下列各对直线是否共面.若共面,是否平行或(垂直)相交?

① $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{1}$, $\frac{x}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{3z-5}{3}$;

② $\begin{cases}x+y+z=0,\\ y+z+1=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x+z+1=0,\\ y+z+1=0;\end{cases}$

③ $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0}$;

④ $\begin{cases} x-y-z+2=0, \\ 2x-3y+3=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y+z=0, \\ 2y-4z-5=0. \end{cases}$

6. 求直线$\begin{cases} x+y-z+1=0, \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

7. 证明三个平面 $2x-y+5=0$，$x-2y+z+2=0$ 和 $3x-3y+z+7=0$ 属于同一个平面束.

8. 求过定点(a,b,c)且与二异面直线

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}, \quad \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}$$

①均相交；②均垂直的直线方程.

9. 求直线$\begin{cases} x=mz+a, \\ y=nz+b \end{cases}$和平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 相交、平行和重合的充要条件.

10. 求过点(a,b,c)，与直线$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$垂直，且与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 平行的直线方程.

11. 求过点(a,b,c)，与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 垂直，且与直线$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$平行的平面方程.

12. 求证三个平面

$$A_1x+B_1y+C_1z=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z=0,$$
$$A_3x+B_3y+C_3z=0$$

共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

13. 求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与各坐标轴的夹角.

14. 求平面 $z=px+qy+l$ 与 xy 面的夹角.

15. 求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与 x 轴及 y 轴成等角的条件，以及它与三个坐标轴成等角的条件.

16. 求直线$\frac{x}{2}=\frac{y+12}{3}=\frac{z-4}{6}$和平面 $6x+15y-10z=0$ 的夹角.

17. 求经过平面 $x+5y+z=0$ 和 $x-z+2=0$ 的交线且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面.

§9 距 离

1. 点到平面的距离

为了研究点到平面的距离,我们先介绍两个概念:平面的法式方程和平面到点的离差.

从原点向平面 α 作垂线 ON,交平面于 T 点,OT 长为 p. 取与 OT 同向的单位向量 $\boldsymbol{N}^0$,于是平面 α 的方程可以表示为

$$\boldsymbol{N}^0\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OT})=0, \tag{$*$}$$

此处 $\overrightarrow{OP}$ 是 α 上任一点 P 的向径. 因为 $\boldsymbol{N}^0\cdot\overrightarrow{OT}=p$,所以($*$)即为

$$\boldsymbol{N}^0\cdot\overrightarrow{OP}-p=0. \tag{9.1}$$

因为 $\boldsymbol{N}^0$ 是单位向量,所以 $\boldsymbol{N}^0$ 的坐标就是它的方向余弦,即 $\boldsymbol{N}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 设动点 $P(x,y,z)$,于是(9.1)的坐标表示为

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. \tag{9.2}$$

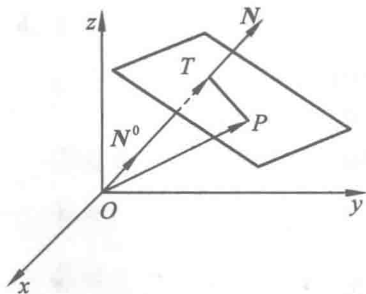


图 9-1

(9.1)和(9.2)分别称为**平面 α 的向量形式**的和**坐标形式的法式方程**.

特别地,若平面通过原点,即 O 与 T 重合时,$p=0$. 当平面不通过 z 轴时,我们规定 $\boldsymbol{N}^0$ 向上,于是 $\gamma<\frac{\pi}{2}$,$\cos\gamma>0$;当平面通过 z 轴而不通过 y 轴时,即此时有 $\cos\gamma=0$,我们规定 $\boldsymbol{N}^0$ 的方向使 $\beta<\frac{\pi}{2}$,即 $\cos\beta>0$;当平面就是 yz 面时,即此时 $\cos\gamma=0$,$\cos\beta=0$,我们规定 $\boldsymbol{N}^0$ 与 x 轴同向.

定义 9.1 设 d 表示点 P 到平面 α 的距离. 当 P 点与原点分别在平面 α 的两侧时,称 $+d$ 是**平面 α 到点 P 的离差**;当 P 点与原点在平面 α 的同侧时,称 $-d$ 是平面 α 到点 P 的**离差**.

若原点在平面 α 上,则规定当 P 点在 $\boldsymbol{N}^0$ 的正向所指的那一侧时,平面 α 到

P 的离差为$+d$，在相反的一侧时，离差为$-d$.

由这个定义，我们若能设法计算出平面到某一点的离差，则其绝对值即为平面到该点的距离了. 对于计算离差，我们有如下定理.

定理 9.1　已知平面 α 的法式方程为

$$\boldsymbol{N}^0 \cdot \overrightarrow{OP} - p = 0,$$

则平面 α 到 α 外一点 P_0 的离差 δ 等于

$$\delta = \boldsymbol{N}^0 \cdot \overrightarrow{OP_0} - p. \tag{9.3}$$

证　设 P_0 点在由 $\boldsymbol{N}^0$ 所决定的轴 l 上的投影为 Q 点，该轴与 α 的交点为 T（如图 9-2）. 于是平面 α 到 P_0 的离差 δ 就等于 l 轴上的有向线段 $\overline{TQ}$ 的量 TQ.

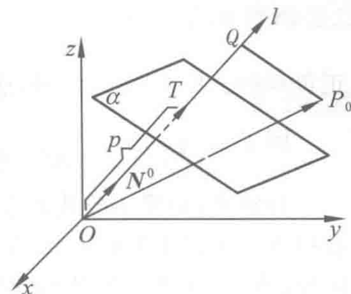


图　9-2

而 $TQ = OQ - OT$，这里 OQ，OT 分别是 l 上有向线段 $\overline{OQ}$ 及 $\overline{OT}$ 的量，且 $OQ = \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{N}^0}\overrightarrow{OP_0} = \boldsymbol{N}^0 \cdot \overrightarrow{OP_0}$，$|\overrightarrow{OT}| = p$. 所以有 $\delta = TQ = \boldsymbol{N}^0 \cdot \overrightarrow{OP_0} - p$. □

这个定理告诉我们：平面到一点的离差，等于在平面的法式方程(9.1)的左端，用该点的向径去替换平面方程中动点的向径所得的结果.

推论 9.1　设平面 α 的法式方程为

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

则平面 α 到 α 外一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的离差是

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p, \tag{9.4}$$

即平面到一点的离差，等于在平面的法式方程(9.2)的左端用该点的坐标去替换方程中动点的坐标所得的结果. 因此，要求点到平面的距离或离差，先要求出平面的法式方程.

设平面 α 的一般方程为

$$\boldsymbol{N} \cdot \overrightarrow{OP} + D = 0, \tag{9.5}$$

将它与 α 的法式方程(9.1)比较，可以看出它们有两点区别：首先，法式方程中的法向量是单位向量 $\boldsymbol{N}^0$，而一般式中的法向量 $\boldsymbol{N}$ 不必是单位向量；其次法式方程中的常数项$(-p)$，永远为负（因为 p 是原点到平面的距离永远为正），而一般式中的常数项 D 不必为负. 因此将一般式(9.5)化成法式(9.1)，只需将法向量 $\boldsymbol{N}$ 化成单位向量，并适当改变 D 的符号. 为此我们用$\pm\dfrac{1}{|\boldsymbol{N}|}$去乘(9.5)的各项，

正负号的选取，使与 D 反号. 这时(9.5)就化成法式方程

$$\frac{\boldsymbol{N}\cdot\overrightarrow{OP}+D}{\pm|\boldsymbol{N}|}=0. \tag{9.6}$$

若用坐标表示，平面 α 的一般式方程为

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{9.7}$$

各项乘以因子 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，得

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0, \tag{9.8}$$

正负号的选取使与 D 反号，这就是法式方程了.

因子 $\pm\dfrac{1}{|\boldsymbol{N}|}$ 即 $\pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 称为**法式化因子**.

特别地，如果一般式方程(9.7)中 $D=0$，根据前述当 $p=0$ 时，关于法式方程中 $\boldsymbol{N}^0$ 的方向的规定，(9.8)中正负号的选取规定如下：当 $D=0, C\neq 0$ 时与 C 同号；当 $D=0, C=0, B\neq 0$ 时与 B 同号；当 $D=C=B=0$ 时与 A 同号.

推论 9.1 用于(9.8)式，又因为离差的绝对值就是距离，所以我们有如下的

定理 9.2 平面 α

$$Ax+By+Cz+D=0$$

到点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的离差是

$$\delta=\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \tag{9.9}$$

正负号的选取按照对(9.8)式的规定.

点 P_0 到平面 α 的距离是

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{9.10}$$

由以上讨论的结果可知，如果我们把平面 α 的方程左端的三元一次多项式看成是空间点的函数，则对应于平面 α 上的点，该函数值为零；对应于平面一侧的所有点，函数值皆为正；而对应于平面另一侧的所有点，函数值皆为负. 特别地，当平面 α 的方程为法式方程时，原点所在的平面这一侧的所有点，对应的函数值皆为负. 于是我们有

推论 9.2 平面 α: $Ax+By+Cz+D=0$ 把整个空间的点分成三部分，平面上的点

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

平面一侧的点

$$Ax+By+Cz+D>0,$$

平面另一侧的点

$$Ax+By+Cz+D<0.$$

例 1 求二平行平面

$$\alpha_1: 2x-2y+z-3=0, \qquad ①$$

$$\alpha_2: 4x-4y+2z+5=0 \qquad ②$$

之间的距离.

解法一 因 $\alpha_1 /\!/ \alpha_2$，所以只要在 α_1 上任取一点，求该点到 α_2 的距离即为二平面之间的距离.

在①式中令 $x=0, y=0$，解得 $z=3$. 于是 $P_1(0,0,3)$ 是 α_1 上一点. 将②化成法式，用法式化因子 $\dfrac{1}{-\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}=-\dfrac{1}{6}$ 乘②式得 α_2 的法式方程

$$-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{5}{6}=0.$$

P_1 到 α_2 的离差为 $\delta=-\dfrac{2}{3}\times 0+\dfrac{2}{3}\times 0-\dfrac{1}{3}\times 3-\dfrac{5}{6}=-\dfrac{11}{6}$.

于是 P_1 到 α_2 的距离 $d=\dfrac{11}{6}$，这就是 α_1 与 α_2 的距离.

解法二 将①和②都化成法式方程

$$\alpha_1: \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-1=0, \qquad ③$$

$$\alpha_2: -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{5}{6}=0. \qquad ④$$

由法式方程③和④可知原点到 α_1 的距离 $d_1=1$，原点到 α_2 的距离 $d_2=\dfrac{5}{6}$. 但从③，④又可知 α_1 和 α_2 的法向量方向相反，即二平行平面位于原点两侧，所以 α_1，α_2 的距离 $d=d_1+d_2=1+\dfrac{5}{6}=\dfrac{11}{6}$.

例 2 求二相交平面

$$\alpha_1: x-2y-2z-1=0, \quad \alpha_2: 3x-4y+5=0$$

所成二面角的平分面的方程.

解 α_1 和 α_2 所成二面角的平分面，就是到 α_1 和 α_2 的距离相等的点的轨迹.

α_1 和 α_2 的法式方程分别为

$$\frac{1}{3}(x-2y-2z-1)=0$$

和
$$-\frac{1}{5}(3x-4y+5)=0.$$

设 $P(x,y,z)$ 为所求平分面上任一点，则有

$$\left|\frac{1}{3}(x-2y-2z-1)\right|=\left|-\frac{1}{5}(3x-4y+5)\right|,$$

即
$$\frac{1}{3}(x-2y-2z-1)=-\frac{1}{5}(3x-4y+5),$$

和
$$\frac{1}{3}(x-2y-2z-1)=\frac{1}{5}(3x-4y+5),$$

也就是
$$7x-11y-5z+5=0$$

和
$$2x-y+5z+10=0.$$
□

2. 点到直线的距离

已知直线 l：$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$ 及 l 外一点 A，求 A 到 l 的距离 d.

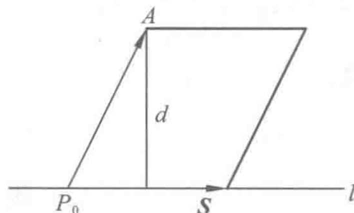


图 9-3

如图 9-3，作以直线 l 上的定点 P_0 为顶点、$\overrightarrow{P_0A}$ 与 $\boldsymbol{S}$ 为邻边的平行四边形，则 $\boldsymbol{S}$ 所在的底边上的高即为 A 点到 l 的距离 d. 由外积的几何意义，我们知道上述平行四边形的面积为 $|\overrightarrow{P_0A}\times\boldsymbol{S}|$. 这个面积被底边长 $|\boldsymbol{S}|$ 除，即得该底边上的高，所以有

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0A}\times\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{S}|}. \tag{9.11}$$

若 l 的方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

则点 $A(a,b,c)$ 到 l 的距离为

$$d=\frac{|(a-x_0,b-y_0,c-z_0)\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{9.12}$$

3. 二异面直线间的距离及公垂线方程

和两条异面直线 l_1，l_2 都垂直相交的直线，叫做 l_1，l_2 的**公垂线**，公垂线介于 l_1 和 l_2 之间的线段的长度叫做这**两条异面直线之间的距离**.

已知二异面直线

$$l_1: \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{S}_1,$$
$$l_2: \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_2+t\boldsymbol{S}_2.$$

求 l_1, l_2 的公垂线方程.

设公垂线为 l. 因为 $l \perp l_1, l \perp l_2$,所以选取 l 的方向向量为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2$$

(因为 l_1, l_2 异面,所以 $\boldsymbol{S}_1 \not\parallel \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2\neq\boldsymbol{0}$). 因为 l 要与 l_1 相交,所以 l 必在过 l_1 且与 $\boldsymbol{S}$ 平行的平面 α_1 内,故 α_1 的法向量为 $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_1\times(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)$, α_1 的方程为

$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1)\cdot(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S})=0 \text{ 即}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)=0.$$

同理,因为 l 要与 l_2 相交,所以 l 必在过 l_2 且与 $\boldsymbol{S}$ 平行的平面 α_2 内,故 α_2 的法向量为 $\boldsymbol{S}_2\times\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}_2\times(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)$, α_2 的方程为

$$(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2)\cdot(\boldsymbol{S}_2\times\boldsymbol{S})=0 \text{ 即}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)=0.$$

因为 α_1, α_2 不平行,所以 α_1, α_2 的交线是唯一存在的. α_1, α_2 的交线就是已知二异面直线 l_1, l_2 的公垂线 l(如图 9-4),故 l_1, l_2 的公垂线 l 的方程为

$$\begin{cases}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)=0, \\ (\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)=0.\end{cases} \quad (9.13)$$

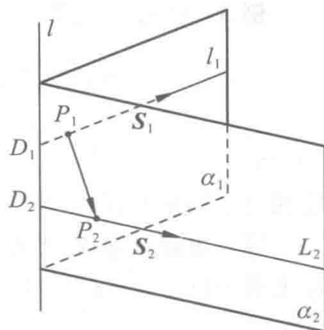


图 9-4

化成坐标表示为:

二异面直线

$$l_1: \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

的公垂线 l 的方程为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0, \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0,\end{cases} \quad (9.14)$$

此处 $(l, m, n)=(l_1, m_1, n_1)\times(l_2, m_2, n_2)$.

设 l_1, l_2 的公垂线 l 与 l_1 交于 D_1,与 l_2 交于 D_2,则线段 D_1D_2 的长 $|D_1D_2|$ 即为 l_1, l_2 间的距离 d.

由图 9-4 中可看出 $|D_1D_2|=|\mathrm{Prj}_S\overrightarrow{P_1P_2}|$，即 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 在 l 上的射影的绝对值，于是有

二异面直线 l_1,l_2 间的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot \boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{S}|}=\frac{|(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)|}{|\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2|}. \tag{9.15}$$

公式(9.15)有明显的几何意义：(9.15)的分子表示以 $\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2$ 为棱的平行六面体的体积(如图 9-5)，分母表示以 $\boldsymbol{S}_1$ 和 $\boldsymbol{S}_2$ 为邻边的平行四边形的面积，即上述平行六面体的一个底面积，因此公式(9.15)表示 d 等于上述平行六面体的体积除以底面积，即 d 等于这个平行六面体的高. 了解公式(9.15)的几何意义，可以帮助我们记住这个公式.

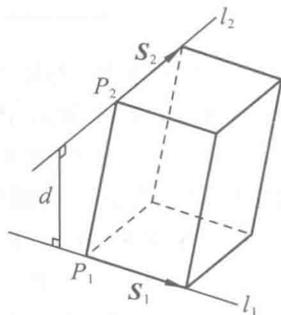


图 9-5

例 3 已知二直线

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{0},$$

$$l_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}.$$

①说明它们异面；②求公垂线方程；③求距离.

解 由题设知，l_1 上有一点 $P_1(0,1,-1)$，l_1 的方向向量 $\boldsymbol{S}_1=(1,-1,0)$；$l_2$ 上有一点 $P_2(-1,1,0)$，l_2 的方向向量 $\boldsymbol{S}_2=(2,-1,2)$.

① $$(\overrightarrow{P_1P_2},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2)=\begin{vmatrix}-1-0 & 1-1 & 0-(-1)\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}=3\neq 0,$$

所以 l_1,l_2 异面.

② $\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2=(1,-1,0)\times(2,-1,2)=(-2,-2,1)$.

公垂线的方程为

$$\begin{cases}\begin{vmatrix} x & y-1 & z+1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0, \\ \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x+y+4z+3=0, \\ x-2y-2z+3=0. \end{cases}$$

③　$(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)=3$,

$|\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=3.$

由公式(9.15)得 l_1,l_2 的距离 $d=\dfrac{|(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2)|}{|\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_2|}=1.$ □

附注　已知两条异面直线 l_1 和 l_2，我们现在介绍两种建立坐标系的方法，使它们的方程具有较为简单的形式.

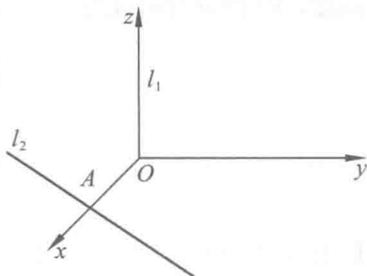


图　9-6

方法一　以 l_1 为 z 轴，公垂线为 x 轴(如图 9-6). 若 l_1,l_2 的距离为 a，则公垂线和 l_1 的交点为原点，与 l_2 的交点为 $A(a,0,0)$. 此时 l_1 的方程即为 $\dfrac{x}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{1}$. 因为 l_2 与 x 轴垂直，所以 l_2 的方向向量 $\boldsymbol{S}_2=(l,m,n)$ 满足 $\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{i}=0$，即 $l=0$. 因此可设 $\boldsymbol{S}=(0,1,n)$(n 可由 l_1 与 l_2 的夹角决定). 于是 l_2 的方程为

$$\frac{x-a}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{n}.$$

方法二　设 l_1,l_2 的距离为 $2c$，l_1,l_2 的夹角为 2α. 取 l_1,l_2 的公垂线为 z 轴，公垂线段的中点 O 为原点. 过 O 分别作直线 $OA\,/\!/\,l_1$，$OB\,/\!/\,l_2$，取 OA，OB 交角的两条角平分线为 x 轴及 y 轴(如图 9-7). 公垂线和 l_1,l_2 分别交于 C,C'，于是有 $C(0,0,c)$，$C'(0,0,-c)$. 因为 $l_1\,/\!/\,OA$，而 OA 在 xy 面上，OA 的方向向量为 $(1,\tan\alpha,0)$(如图 9-8)，所以 l_1 的方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{\tan\alpha}=\frac{z-c}{0}.$$

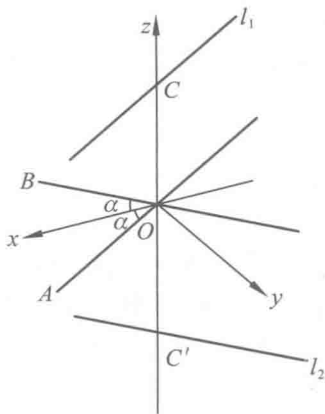


图 9-7

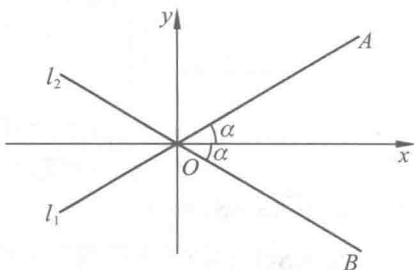


图 9-8

同理，OB 的方向向量为$(1,-\tan\alpha,0)$，l_2 的方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{-\tan\alpha}=\frac{z+c}{0}.$$

习 题 九

1. 把下列平面的一般式化成法式，并指出其单位法向量在哪一卦限内.

①$x-2y+3z-1=0$；

②$x-2y-2z=0$.

2. 求点到平面的距离：

①$(0,2,1)$到 $2x-3y+5z-1=0$；

②$(-1,2,4)$到 $x-y+1=0$；

③原点到$-x+y+z=a,a>0$.

3. 已知两点 $A(1,1,1)$和 $B(2,-2,-2)$，试回答：

①A,B 是否在平面 $x+y+z+3=0$ 的同侧？

②A,B 是否在平面 $x+y+z=0$ 的同侧？

③A 是否在上述二平行平面之间？

④B 是否在上述二平行平面之间？

4. 求二平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 及 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 间的距离.

5. 已知二平行平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 及 $Ax+By+Cz+D_2=0$，$D_1^2+D_2^2\neq0$，求两个与它们平行的平面，把它们之间的距离三等分.

6. 在 y 轴上求一点，使它到两个平面 $2x+3y+6z-6=0$ 和 $3x-6y-2z-18=0$ 有相等的距离.

7. 求两相交平面 $2x-y-2z-3=0$ 和 $6x-3y+2z-4=0$ 所成二面角的平分面的方程，并指出哪一个位于原点所在的二面角内.

8. 试证三面角的三个二面角的平分面交于一条直线.

9. 已知原点到平面

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (a,b,c\text{ 全不为零})$$

的距离为 p，试证

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

10. 求下列点到直线的距离：

①$(1,-1,2)$ 到 $\dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$；

②$(1,2,3)$ 到 $\begin{cases}3x+y-4=0,\\2x+z-3=0.\end{cases}$

11. 求二平行直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$，$\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$ 间的距离.

12. 说明下列二直线异面，并求它们的距离及公垂线方程.

①$\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$ 和 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z-3}{2}$；

②$\begin{cases}x=3+t,\\y=1+t,\\z=2+2t\end{cases}$ 和 $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z}{3}$.

*13. 已知两条异面直线 l_1 和 l_2，试证连接 l_1 上任一点和 l_2 上任一点的线段的中点轨迹是公垂线段的垂直平分面.

14. 验证二异面直线的公垂线方程(9.13)中的两个平面确是相交的，且交线的方向向量确与二已知直线的方向向量垂直.

第三章 特殊曲面和二次曲面

§10 曲面与方程 球面、直圆柱面和直圆锥面的方程

1. 曲面与方程

我们把曲面看成是满足某些条件的空间点的轨迹.

如果在空间直角坐标系下，一个三元方程 $F(x,y,z)=0$ 和一个曲面 S 之间有如下关系：

①曲面 S 上每一点的坐标 (x,y,z) 都满足方程；

②坐标 (x,y,z) 满足方程的每一点都在曲面 S 上，则称方程 $F(x,y,z)=0$ 是曲面 S 的方程，也称曲面 S 是方程 $F(x,y,z)=0$ 表示的曲面，或直接用方程 $F(x,y,z)=0$ 来代表曲面 S，说“曲面 $F(x,y,z)=0$”.

两个曲面相交时，交线为一条空间曲线，因此，常常用两个三元方程联立在一起，作为一条空间曲线的方程. 例如，方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

就是曲面 $F(x,y,z)=0$ 与曲面 $G(x,y,z)=0$ 的交线的方程. 因为通过一条空间曲线的曲面可以有无数多个，从其中任取两个，把它们的方程联立在一起，只要两个方程组是同解方程组，则它们就表示同一条空间曲线，因此空间曲线的方程不是唯一的. 例如，方程组

$$\begin{cases}x+y+z-1=0,\\x-2y+3z+2=0\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}2x-y+4z+1=0,\\3y-2z-3=0\end{cases}$$

就是同一条直线的方程.

已知一个曲面，建立它的方程的一般方法是：先分析曲面的几何特征，即曲面上的点应满足的几何条件，把曲面看成是满足这些几何条件的空间动点的轨迹，然后设曲面上任一点的坐标为 (x,y,z)，由点所应具备的几何条件求出 x，

y,z 应满足的方程(或动点的向径应满足的向量方程).这一步通常是一个"翻译"的工作,即写出几何条件的代数表示.最后再验证,凡坐标满足方程的点,都具备上述几何条件,即都在已知曲面上.这样,我们就求出了已知曲面的方程.这是建立曲面方程的标准方法之一,第二章中建立平面方程时,我们就是用的这个方法,本节我们将继续学习这种方法.作为几个实例,我们用这种方法来建立球面、直圆柱面和直圆锥面的方程.

2. 球面方程

我们把到空间一个定点的距离是定数的空间动点的轨迹称为**球面**,定点叫做**球心**(或**中心**),定数叫做**半径**.

下面我们来求以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心,R 为半径的球面方程.

设球面上的动点为 $P(x,y,z)$,由球面定义有

$$|\overrightarrow{P_0P}|=R,$$

即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \tag{10.1}$$

这就是球面上任一点 $P(x,y,z)$ 所适合的方程.反过来,坐标适合方程(10.1)的任一点 (x,y,z) 与 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的距离都是 R,因此该点在球面上.由曲面方程的定义,方程(10.1)是所求球面的方程.

特别地,以原点为球心,半径为 R 的球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R. \tag{10.2}$$

方程(10.1)是空间任意球面的方程,将(10.1)展开得

$$x^2+y^2+z^2-2x_0x-2y_0y-2z_0z+$$
$$(x_0^2+y_0^2+z_0^2-R^2)=0,$$

写成一般形式为

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0. \tag{10.3}$$

由此我们可以得到:一个一般三元二次方程

$$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+$$
$$2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$$

表示球面的必要条件是它具有(10.3)的形式,即没有乘积 xy,yz,zx 各项,平方项系数都相等且不为零,因而可以化成1.这个条件也是充分的,事实上只要将(10.3)配方,就可以得到球面方程(10.1)①.

---

① 这里我们实际上是把 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$ 等于负数或零的情形也称为球面了.

因此以后我们在根据已知条件求球面方程时，可以设球面方程为(10.1)，也可以设球面方程为(10.3).

空间中的一个圆，可以看做是一个球面与一个平面的交线，因此可以把一个球面和一个平面的方程联立起来，表示一个空间圆的方程.

例 1 已知空间三点 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$.

①求经过 A,B,C 及原点的球面的方程；

②求经过 A,B,C 的空间圆的方程.

解 ① 设所求球面方程为

$$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0.$$

因为该球面经过 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$及$(0,0,0)$，所以有

$$a^2+a\alpha+\delta=0,$$

$$b^2+b\beta+\delta=0,$$

$$c^2+c\gamma+\delta=0,$$

及

$$\delta=0.$$

由这几个关系式，可以解得

$$\alpha=-a,\quad \beta=-b,\quad \gamma=-c,\quad \delta=0.$$

于是所求球面方程为

$$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0. \tag{*}$$

② 所求的经过 A,B,C 三点的空间圆，是过 A,B,C 三点的任一球面与过 A,B,C 三点的平面的交线.

过 A,B,C 三点的平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{**}$$

过 A,B,C 三点的球面就取①中的球面(*)，因此，所求的空间圆的方程即为(*)与(**)联立成的方程组. □

例 2 求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 与球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ 相交、相切和相离的充要条件.

解 平面和球面相交、相切、相离的位置关系是由球心到平面的距离小于、等于、大于球面的半径来决定的.

设球心(x_0,y_0,z_0)到平面的距离为 d，则

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

于是得到平面和球面位置关系的充要条件为：

相交$\Longleftrightarrow d<R$；相切$\Longleftrightarrow d=R$；相离$\Longleftrightarrow d>R$. □

3. 直圆柱面方程

我们把与一条定直线的距离是定数的空间动点的轨迹称为**直圆柱面**(如图 10-1)，定直线叫做**直圆柱面的轴**，定数叫做**直圆柱面的半径**.

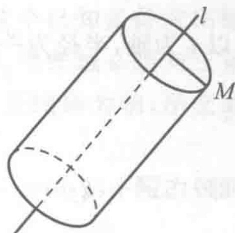


图　10-1

现在，我们来求以直线 l

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$$

为轴、以 R 为半径的直圆柱面的方程.

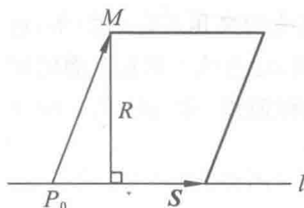


图　10-2

设直圆柱面上任一点为 $M(x,y,z)$，则 M 到 l 的距离为 R，由点到直线的距离公式(如图 10-2)，有

$$\frac{|(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{P}_0)\times\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{S}|}=R, \tag{10.4}$$

这就是直圆柱面上任一点 M 的向径 $\boldsymbol{M}$ 所适合的方程. 反之，适合方程(10.4)的任一向径 $\boldsymbol{M}$ 的终点 M 到 l 的距离都等于 R，即 M 在直圆柱面上. 所以方程(10.4)即为所求直圆柱面的方程(向量形式).

若直线 l 的方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

则上述直圆柱面方程(坐标形式)为

$$\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2=(l^2+m^2+n^2)R^2. \tag{10.5}$$

特别地，以 z 轴为轴、R 为半径的直圆柱面的方程为

$$x^2+y^2=R^2. \tag{10.6}$$

例 3　求以 $l:\dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}$ 为轴，且过点 $A(1,0,1)$ 的直圆柱面的方程.

分析：直圆柱面是由轴及半径决定的，本题已知轴，需求出半径. 因为柱面上每一点到轴的距离都是定数即半径，因此由柱面过 A 点即可求出半径.

解　点 $A(1,0,1)$ 到 l 的距离为

$$\frac{|(1-0,0-1,1-0)\times(0,1,2)|}{|(0,1,2)|}=\frac{|(1,-1,1)\times(0,1,2)|}{|(0,1,2)|}$$

$$=\frac{|(-3,-2,1)|}{|(0,1,2)|}=\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}},$$

以 l 为轴，半径为 $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$ 的直圆柱面的方程为

$$\frac{|(x-0,y-1,z-0)\times(0,1,2)|}{|(0,1,2)|}=\sqrt{\frac{14}{5}},$$

即 $5x^2+(2y-z-2)^2=14.$ □

4. 直圆锥面方程

空间动点到一定直线 l 上的定点 A 的连线与该定直线的夹角成定(锐)角，这样的动点的轨迹称为**直圆锥面**，定直线 l 和它上面的定点 A 分别叫做**直圆锥面的轴和顶点**，定(锐)角 α 叫做它的**半顶角**(如图 10-3).

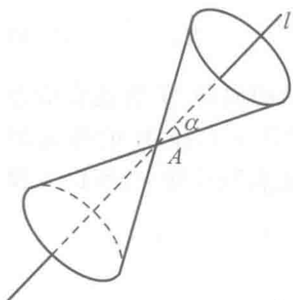


图 10-3

现在，我们来求以直线

$$l: \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{S}$$

为轴，P_0 为顶点，θ 为半顶角的直圆锥面的方程.

设直圆锥面上任一点为 $M(x,y,z)$，则直线 P_0M 与直线 l 的夹角为 θ，直线 P_0M 的方向向量 $\boldsymbol{S}_1=\overrightarrow{P_0M}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{P}_0$. 由二直线夹角的公式，我们有

$$|\cos\theta|=\frac{|(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{P}_0)\cdot\boldsymbol{S}|}{|\boldsymbol{M}-\boldsymbol{P}_0||\boldsymbol{S}|}. \tag{10.7}$$

这就是直圆锥面上任一点 M 的向径 $\boldsymbol{M}$ 所适合的方程. 反之，适合方程(10.7)的任一向径 $\boldsymbol{M}$ 的终点 M 与 P_0 的连线和 l 的夹角都等于 θ，即 M 在直圆锥面上. 所以方程(10.7)即为直圆锥面的方程(向量形式).

若已知直线 l 的方程为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

P_0 的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则上述直圆锥面的方程(10.7)化为

$$[l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)]^2$$
$$=[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2](l^2+m^2+n^2)\cos^2\theta.$$

特别地，以 z 轴为轴，原点为顶点，半顶角为 θ 的直圆锥面的方程为

$$x^2+y^2=z^2\tan^2\theta. \tag{10.8}$$

例 4 求以坐标原点为顶点且通过三条坐标轴的直圆锥面方程(求其轴穿

过第一、第七卦限者).

分析:由直圆锥面的定义,确定一个直圆锥面需要三个条件:轴、顶点和半顶角.本题已知顶点,需要由直圆锥面"经过三条坐标轴"这个已知条件求出轴和半顶角.而轴必须与锥面的任一直线交成定角(半顶角),因此轴必须与三条坐标轴都交成某定角.于是得知与三条坐标轴交成等角的直线即为轴,所交的角就是半顶角.

解　设所求直圆锥面的轴的方向角为 α,β,γ,且 $\alpha=\beta=\gamma$(α,β,γ 同为锐角(第一卦限)或同为钝角(第七卦限)).于是有 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$,但

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

所以

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

或

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

于是所求的直圆锥面的轴为

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{y}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{3}},$$

即

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.$$

半顶角取为 $\alpha=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$,所求的直圆锥面的方程为

$$\cos\alpha=\frac{(x,y,z)\cdot(1,1,1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{3}},$$

而 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$,即

$$xy+yz+zx=0.$$

这就是所求的轴穿过第一、第七卦限的直圆锥面方程.　□

若不限制轴穿过第一、第七卦限,本题有四解,留给读者思考.

习　题　十

1. 求下列球面的中心和半径:

①$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$;

②$x^2+y^2+z^2+8x=0$.

2. 求下列球面的方程：

①以点(1,2,3)与点(−1,6,−5)所连线段为直径；

②过点(1,−1,1),(1,2,−1),(2,3,0)和坐标原点；

③过点(1,2,5)且与三个坐标面皆相切；

④球心在(x_0,y_0,z_0)且与 xy 面相切；

⑤过点(2,−4,3)且包含圆

$$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ z=0. \end{cases}$$

3. 求与球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 相切于其上一点(2,2,1)的平面方程，该平面称为球面在该点处的**切平面**.

4. 求空间圆

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

的中心和半径.

5. 讨论两个球面

$$S_1:(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=R_1^2,$$
$$S_2:(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2=R_2^2$$

的位置关系，即推导出它们相外离、外切、相交、内切和内含的充要条件.

6. 求与三个坐标面均相切的球面族的方程，限制球心在第一卦限的情形，并求球心的轨迹.

7. 求半径为 2，$x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 为轴的直圆柱面的方程.

8. 求以 $x=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$ 为轴，且过点(0,0,1)的直圆柱面的方程.

9. 若一球面在一直圆柱面的内部，且球面的半径与直圆柱面的半径相等，则称该直圆柱面外切于球面.

求与两个球面

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ 和} (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

均外切的直圆柱面方程.

10. 求顶点为(1,2,3)，轴与平面 $2x+2z-z+1=0$ 垂直，且半顶角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直圆锥面的方程.

11. 求以直线 $x=y=z$ 为轴，且通过直线 $2x=3y=-5z$ 的直圆锥面方程.

12. 求顶点为(1,2,4),轴为$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{1}$,且经过点(3,2,1)的直圆锥面的方程.

13. 求与定平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离是定数d的空间动点的轨迹方程.

14. 已知定平面α_0:$Ax+By+Cz+D=0$上一定点$P_0(x_0,y_0,z_0)$,求与P_0的连线和α_0交成定(锐)角α的空间动点的轨迹方程.

§11　曲线族产生曲面的理论　柱面、锥面及旋转曲面的方程

1. 曲线族产生曲面的理论

本节我们将介绍建立曲面方程的另一种方法——把曲面看成是满足某种条件的动曲线的轨迹.例如,平面可以看成是过定点且与定直线垂直的动直线的轨迹;直圆锥面可以看成是过定直线上一定点且与定直线成定(锐)角的动直线的轨迹;球面可以看成是绕着直径旋转的动圆的轨迹等等.

动曲线的方程如何表示呢?曲线方程中如果含有参数λ,如

$$\begin{cases}F(x,y,z,\lambda)=0,\\G(x,y,z,\lambda)=0,\end{cases}\tag{11.1}$$

当参数λ取某定值λ_0时,方程(11.1)表示两个定曲面的交线,即一条定曲线.当λ变动时,(11.1)中的两个曲面随之变动,它们的交线也就变动了.因此我们用含参数的曲线方程(11.1)来表示动曲线,即曲线族.当曲线族中的参数连续变动时,族中的曲线也连续变动,它们的全体就组成一个曲面,我们就称这个曲面是由该曲线族产生的.

从含参数λ的曲线族方程

$$\begin{cases}F(x,y,z,\lambda)=0,\\G(x,y,z,\lambda)=0\end{cases}$$

中消去参数λ,所得的方程

$$H(x,y,z)=0\tag{11.2}$$

就是曲线族(11.1)所产生的曲面的方程,这就是曲线族产生曲面的理论.当曲线族方程(11.1)中的两个方程$F(x,y,z,\lambda)=0$及$G(x,y,z,\lambda)=0$的左端都是关于x,y,z,λ的多项式时,上述曲线族产生曲面的理论的证明,需要用到多项

式的结式的理论①，这里就不作介绍了.

一般地，如果有含 p 个参数的曲线族

$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)=0, \\ G(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)=0, \end{cases} \tag{11.3}$$

其中 p 个参数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 适合 $p-1$ 个关系式，然后从这 $p-1$ 个关系式连同(11.3)中的两个关系式，共 $p+1$ 个关系式中消去 p 个参数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$，所得方程即为该曲线族所产生的曲面的方程.

下面我们来看两个具体的例子.

例 1 求直线族(λ 为参数)

$$\begin{cases} x+y=\lambda, \\ z=\lambda \end{cases}$$

所产生的曲面方程.

解 消参数 λ，得 $x+y=z$，即为所求. □

例 2 求直线族(λ 为参数)

$$\begin{cases} x+2\lambda y+4z=4\lambda, \\ \lambda x-2y-4\lambda z=4 \end{cases}$$

所产生的曲面方程.

解 第一式化为 $x+4z=2\lambda(2-y)$，得

$$\lambda=\frac{x+4z}{2(2-y)};$$

第二式化为 $\lambda(x-4z)=2(2+y)$，得

$$\lambda=\frac{2(2+y)}{x-4z}.$$

消参数 λ，得

$$\frac{x+4z}{2(2-y)}=\frac{2(2+y)}{x-4z},$$

即

$$x^2+4y^2-16z^2=16,$$

这就是所求的曲面方程. □

下面我们将具体应用上述曲线族产生曲面的理论，建立柱面、锥面和旋转曲面的方程.

① 读者可以参看《数学通报》1985 年第 11 期，王敬庚：《关于曲线族产生曲面的理论证明的一点补充——多项式的结式在几何上的一个应用》.

2. 柱面

定义 11.1　由平行于某一定方向且与空间一条定曲线相交的一族平行直线所组成的曲面叫做**柱面**，定曲线叫做**准线**，这族平行直线中的每一条直线都叫做**母线**，定方向叫做**母线方向**.

显然，柱面由它的准线和母线方向完全决定. 但反过来，对于一个柱面，它的准线并不是唯一的，任何一条和所有母线都相交的空间曲线都可以作为该柱面的准线.

已知柱面的准线为一条空间曲线

$$C:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

母线的方向向量为(l,m,n)，求柱面的方程.

在准线 C 上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，过 P_0 以(l,m,n)为方向向量的直线为

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{11.4}$$

当 P_0 点取遍准线 C 上的点时，即 x_0,y_0,z_0 满足关系式

$$\begin{cases}F(x_0,y_0,z_0)=0,\\G(x_0,y_0,z_0)=0.\end{cases} \tag{11.5}$$

从(11.4)和(11.5)中消去参数 x_0,y_0,z_0，得 $H(x,y,z)=0$，即为所求柱面方程.

例 3　求以曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=0\end{cases}$ 为准线，母线平行于向量(1,1,1)的柱面方程.

解　在曲线 C 上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，过 P_0 的母线为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{1}. \tag{①}$$

又 P_0 在 C 上，所以有

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2+z_0^2=1,\\x_0+y_0+z_0=0.\end{cases} \tag{②}$$

为了从①、②中消 x_0,y_0,z_0，令①式等于 t，得

$$x=x_0+t,y=y_0+t,z=z_0+t,$$

代入②得

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2=1,\\ x+y+z-3t=0.\end{cases} \qquad ③$$

从③中消 t，得

$$\left(x-\frac{x+y+z}{3}\right)^2+\left(y-\frac{x+y+z}{3}\right)^2+\left(z-\frac{x+y+z}{3}\right)^2=1,$$

即

$$2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=3,$$

这就是所求的柱面方程. □

现在我们来看一种特殊的情形，即当准线是某个坐标面上的曲线，母线平行于和该坐标面垂直的坐标轴时，看看这时柱面方程具有何种特点.

下面我们来求以 xy 面上的曲线 C：$\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$ 为准线，母线平行于 z 轴的柱面方程.

在准线 C 上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，过 P_0 的母线方程为

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{1}，即\begin{cases}x=x_0,\\ y=y_0.\end{cases} \qquad ④$$

又 P_0 在 C 上，所以有

$$\begin{cases}F(x_0,y_0)=0,\\ z_0=0.\end{cases} \qquad ⑤$$

从④、⑤中消去 x_0,y_0,z_0，得

$$F(x,y)=0, \qquad (11.6)$$

这就是所求柱面的方程.

这就是说，以坐标平面上的任意一条曲线为准线，母线垂直于这个平面的柱面方程，与这条曲线在这个坐标平面上的方程相同.

根据上述结论，我们得到：

定理 11.1 在空间直角坐标系下，如果在一个三元方程中缺一个变量，则该方程表示一个柱面，这个柱面的母线平行于和所缺变量同名的坐标轴，由这个方程作为坐标平面上的曲线方程，它所表示的曲线就是该柱面的一条准线.

例如，方程 $G(y,z)=0$ 表示母线平行于 x 轴的柱面，它的一条准线是

$$\begin{cases}G(y,z)=0,\\ x=0.\end{cases}$$

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad y^2=2px,$$

各表示一个母线平行于 z 轴的柱面，它们的准线分别是 xy 面上椭圆、双曲线和抛物线，它们分别叫做**椭圆柱面**、**双曲柱面**和**抛物柱面**，形状如图 11-1. 它们的方程都是二次的，所以又统称**二次柱面**.

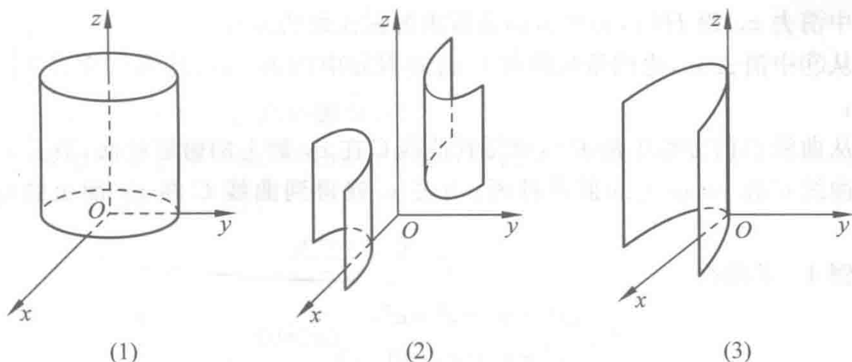


图　11-1

注意：由于平面直角坐标系中任意一条曲线的方程只含有两个变量，因此，这个方程在空间直角坐标系中，就表示母线平行于和它所缺变量同名的坐标轴的一个柱面，而不再表示原来的曲线了. 若要表示原来的曲线，还必须与所缺变量等于零的方程联立.

已知一条空间曲线 C 及一个平面 α，从 C 的每一点向 α 作垂线，由所有的垂足组成的曲线叫做曲线 C 在平面 α 上的**射影曲线**（也可简称为射影），由所有的垂线组成的柱面叫做曲线 C 在平面 α 上的**射影柱面**. 显然，C 在平面 α 上的射影曲线就是 C 在平面 α 上的射影柱面与平面 α 的交线，而 C 在平面 α 上的射影柱面就是以 C 为准线，母线方向垂直于平面 α 的柱面.

我们常常要求一条空间曲线在某个坐标面上的射影曲线的方程，为此只要求出这条曲线在该坐标面上的射影柱面就行了. 譬如：求空间曲线 C

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad ⑥$$

在 xy 面上的射影柱面的方程.

在曲线 C 上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，过 P_0 垂直于 xy 面的直线为

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{1}, \text{即} \begin{cases} x=x_0, \\ y=y_0. \end{cases} \qquad ⑦$$

又 P_0 在 C 上，所以有

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ G(x_0,y_0,z_0)=0. \end{cases} \qquad ⑧$$

要从⑦、⑧中消去参数 x_0, y_0, z_0，将⑦代入⑧得

$$\begin{cases} F(x,y,z_0)=0, \\ G(x,y,z_0)=0. \end{cases} \tag{9}$$

从⑨中消去 z_0，得 $H(x,y)=0$，即为所求射影柱面的方程.

从⑨中消去 z_0，也就是从曲线 C 的方程⑥中消去 z，因此我们有以下一般方法：

从曲线 C 的方程中消去 z，就得到曲线 C 在 xy 面上的射影柱面；消去 x，就得到曲线 C 在 yz 面上的射影柱面；消去 y，就得到曲线 C 在 zx 面上的射影柱面.

例 4 求曲线

$$C: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases} \quad (a>0)$$

在各坐标平面上的射影曲线.

解 曲线 C 是一个球面和一个直圆柱面的交线，这个直圆柱面的方程 $x^2+y^2-ax=0$ 本身就不含有 z，因此它就是 C 在 xy 面上的射影柱面，它和 xy 面的交线

$$\begin{cases} x^2+y^2-ax=0, \\ z=0 \end{cases}$$

就是 C 在 xy 面上的射影曲线.

从曲线 C 的方程中消去 y，得到 $z^2+ax=a^2$，它就是 C 在 zx 面上的射影柱面，所以 C 在 zx 面上的射影曲线为

$$\begin{cases} z^2+a(x-a)=0, \\ y=0. \end{cases} \quad (x\geqslant 0)$$

从曲线 C 的方程中消去 x，得到 $z^4+a^2(y^2-z^2)=0$，它就是 C 在 yz 面上的射影柱面，所以 C 在 yz 面上的射影曲线为

$$\begin{cases} z^4+a^2(y^2-z^2)=0, \\ x=0. \end{cases}$$

□

3. 锥面

定义 11.2 由通过空间一个定点且与一条定曲线相交的一族直线组成的曲面叫做**锥面**，定点叫做它的**顶点**，定曲线叫做它的**准线**，这族直线中的每一条都叫做它的**母线**.

显然，锥面由它的顶点和准线完全决定. 但反过来，对于一个锥面，它的准

线并不是唯一的，任何一条和它的母线都相交的空间曲线都可以作为它的准线.

求以空间曲线 C

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

为准线，以 $A(a,b,c)$ 为顶点的锥面方程.

在准线 C 上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则过 P_0 的母线(即直线 AP_0)的方程为

$$\frac{x-a}{x_0-a}=\frac{y-b}{y_0-b}=\frac{z-c}{z_0-c}. \tag{⑩}$$

又 P_0 在 C 上，所以有

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ G(x_0,y_0,z_0)=0. \end{cases} \tag{⑪}$$

从⑩、⑪中消去参数 x_0,y_0,z_0，得 $H(x,y,z)=0$，即为所求锥面方程.

例 5　求以原点为顶点，曲线 C

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=k\ (k\neq 0) \end{cases}$$

为准线的锥面方程.

解　在准线上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，过 P_0 点的母线(即直线 OP)的方程为

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{z_0}, \tag{⑫}$$

又 P_0 在曲线 C 上，所以有

$$\begin{cases} F(x_0,y_0)=0, \\ z_0=k. \end{cases} \tag{⑬}$$

为了从⑫、⑬中消去参数 x_0,y_0,z_0，令⑫式等于 t，得

$$x=x_0t,\ y=y_0t,\ z=z_0t.$$

代入⑬得

$$\begin{cases} F\left(\dfrac{x}{t},\dfrac{y}{t}\right)=0, \\ \dfrac{z}{t}=k, \end{cases} \tag{⑭}$$

从⑭式消去 t，得

$$F\left(\frac{kx}{z},\frac{ky}{z}\right)=0. \tag{11.7}$$

这就是所求的锥面方程. □

特别地，求以椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c\end{cases}$$

为准线，以原点为顶点的锥面方程，根据(11.7)式，它是

$$\frac{\left(\dfrac{cx}{z}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\dfrac{cy}{z}\right)^2}{b^2}=1,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{11.8}$$

这是一个二次齐次方程，我们称这个锥面(11.8)为**二次锥面**.

下面我们来说明，例 5 中所得到的以原点为顶点的锥面方程(11.7)

$$F\left(\frac{kx}{z},\frac{ky}{z}\right)=0$$

是关于 x,y,z 的齐次方程.

为说明这个问题，我们先介绍齐次方程的概念. 如果函数$F(x,y,z)$中的 x，y,z 分别以 tx,ty,tz 来代替，总有 $F(tx,ty,tz)=t^nF(x,y,z)$，那么这个函数就叫做 n 次**齐次函数**，方程 $F(x,y,z)=0$ 就叫做 n 次**齐次方程**.

因为方程(11.7)适合

$$F\left(\frac{ktx}{tz},\frac{kty}{tz}\right)=t^0F\left(\frac{kx}{z},\frac{ky}{z}\right),$$

所以是零次齐次方程. 若方程(11.7)关于$\left(\dfrac{kx}{z}\right)$和$\left(\dfrac{ky}{z}\right)$是 n 次的，则可化成关于 x,y,z 的 n 次齐次方程. 例如，若(11.7)关于$\left(\dfrac{kx}{z}\right)$和$\left(\dfrac{ky}{z}\right)$是二次的，形如

$$a_1\left(\frac{kx}{z}\right)^2+a_2\left(\frac{kx}{z}\right)\left(\frac{ky}{z}\right)+a_3\left(\frac{ky}{z}\right)^2+a_4\left(\frac{kx}{z}\right)+a_5\left(\frac{ky}{z}\right)+a_6=0,$$

则用 z^2 乘各项，即可得

$$a_1k^2x^2+a_2k^2xy+a_3k^2y^2+a_4kxz+a_5kyz+a_6z^2=0.$$

它是关于 x,y,z 的二次齐次方程.

把这个结果和例 5 结合起来，我们得到如下结论：

以原点为顶点，以曲线$\begin{cases}F(x,y)=0,\\ z=k\end{cases}$为准线的锥面方程$F\left(\dfrac{kx}{z},\dfrac{ky}{z}\right)=0$是关

于 x,y,z 的齐次方程.

反过来,我们有如下判断锥面的定理.

定理 11.2　x,y,z 的一个齐次方程必表示一个以原点为顶点的锥面.

证　设 $F(x,y,z)=0$ 是一个 n 次齐次方程,$P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是它所表示的曲面 S 上任一点,则 $F(x_0,y_0,z_0)=0$. 直线 OP_0 上任一点 P 的坐标必为 (tx_0,ty_0,tz_0),而且 $F(tx_0,ty_0,tz_0)=t^nF(x_0,y_0,z_0)=0$,即 P 点也在 $F(x,y,z)=0$ 所表示的曲面 S 上(如图 11-2),即 S 是由过原点的一族直线组成的,即以原点为顶点的一个锥面. □

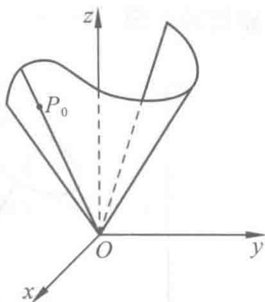


图　11-2

推论 11.1　一个关于 $x-a,y-b,z-c$ 的齐次方程,必表示以点 (a,b,c) 为顶点的锥面.

例 6　一直线通过点 $S(0,b,0)$,并沿着双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases} \tag{15}$$

移动,求此动直线所形成的锥面方程.

解　在双曲线⑮上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,则直线 P_0S 的方程为

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y-b}{y_0-b}=\frac{z}{z_0}, \tag{16}$$

又因 P_0 在⑮上,所以有

$$\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{z_0^2}{c^2}=1,\\ y_0=0.\end{cases} \tag{17}$$

从⑯及⑰中消去参数 x_0,y_0,z_0,由⑯及⑰之第二式得

$$x_0=\frac{-bx}{y-b},\ z_0=\frac{-bz}{y-b},$$

代入⑰之第一式得

$$\frac{\left(\dfrac{-bx}{y-b}\right)^2}{a^2}-\frac{\left(\dfrac{-bz}{y-b}\right)^2}{c^2}=1,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(y-b)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

这就是所求的锥面的方程. □

4. 旋转曲面

定义 11.3 一条空间曲线 C 绕着一条定直线 l 旋转一周所产生的曲面叫做**旋转曲面**. 曲线 C 叫做它的**母曲线**, 定直线 l 叫做它的**旋转轴**(简称为轴).

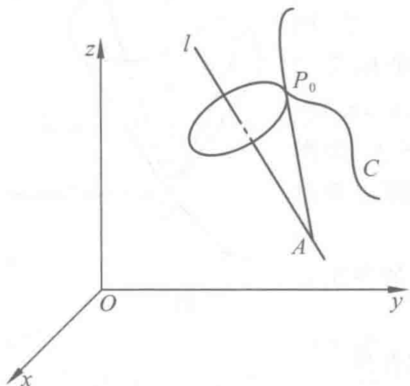


图 11-3

显然, 旋转曲面的母曲线 C 上任一点 P_0 在旋转时形成一个圆(如图 11-3). 这个圆也是垂直于旋转轴且过 P_0 点的平面与旋转曲面的交线, 我们把它叫做**纬圆**或**纬线**. 每一个以旋转轴 l 为边缘的半平面与旋转曲面的交线, 叫做旋转曲面的**经线**. 显然所有的经线的形状完全相同, 在旋转中, 它们都能彼此重合.

现在我们来建立以空间曲线 C

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

为母曲线, 以直线 l

$$\frac{x-a}{l}=\frac{y-b}{m}=\frac{z-c}{n}$$

为旋转轴的旋转曲面的方程.

分析: 如前所述, 母曲线 C 上任一点 P_0 在旋转中形成一个圆(纬圆), 这个圆在过 P_0 点且垂直于轴 l 的平面上, 圆心在轴上. 当 P_0 取遍母曲线的点时, 所得到的一族这样的圆就组成了整个旋转曲面. 若能写出这个圆族的方程, 从其中消去参数, 就得到旋转曲面的方程了.

在母曲线 C 上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$(如图 11-3), 过 P_0 点的纬圆可以看成是以轴 l 上一点 $A(a,b,c)$ 为中心, 以 A 到 P_0 的距离为半径的球面和过 P_0 且与轴 l 垂直的平面的交线, 即

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2, \\ l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0. \end{cases} \tag{18}$$

又 P_0 在母曲线 C 上, 所以有

$$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ G(x_0,y_0,z_0)=0. \end{cases} \tag{19}$$

从⑱和⑲中消去参数 x_0,y_0,z_0, 所得 $H(x,y,z)=0$ 即为所求旋转曲面的方程.

例 7　求直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-3}$绕直线 $x=y=z$ 旋转所得的旋转曲面的方程.

解　这里母曲线为直线

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-3}, \tag{20}$$

旋转轴为直线

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}. \tag{21}$$

在母曲线⑳上任取一点 $P_0(x_0,y_0,z_0,)$，则 P_0 所在的纬圆的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2,\\(x-x_0)+(y-y_0)+(z-z_0)=0.\end{cases} \tag{22}$$

又因 P_0 在直线⑳上，所以有

$$\frac{x_0}{4}=\frac{y_0}{1}=\frac{z_0-1}{-3}. \tag{23}$$

从㉒及㉓中消去参数 x_0,y_0,z_0，为此令㉓式等于 t，得

$$x_0=4t,\ y_0=t,\ z_0=1-3t. \tag{24}$$

代入㉒之第二式，解得

$$t=\frac{1}{2}(x+y+z-1).$$

代入㉔得

$$x_0=2(x+y+z-1),$$

$$y_0=\frac{1}{2}(x+y+z-1),$$

$$z_0=-\frac{3}{2}\left(x+y+z-\frac{5}{3}\right).$$

代入㉒之第一式得

$$x^2+y^2+z^2=\frac{17}{4}(x+y+z-1)^2+\frac{9}{4}\left(x+y+z-\frac{5}{3}\right)^2.$$

这就是所求旋转曲面的方程.　□

常见的是下列特殊情形，母曲线为某个坐标平面上的曲线，旋转轴为该坐标平面上的一个坐标轴. 例如，求母曲线为

$$\begin{cases}F(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}$$

旋转轴为 y 轴的旋转曲面的方程.

y 轴方程为

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0},$$

在母曲线上任取一点$P_0(x_0,y_0,z_0,)$(如图 11-4),则过 P_0 点的纬圆的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2,\\ y-y_0=0.\end{cases} \tag{㉕}$$

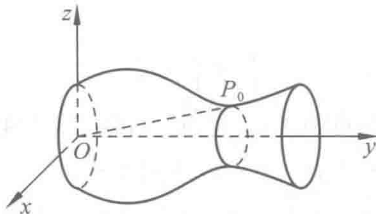


图 11-4

又因 P_0 在母线上,所以有

$$F(y_0,z_0)=0,x_0=0. \tag{㉖}$$

从㉕及㉖中消去参数 x_0,y_0,z_0,将 $x_0=0,y_0=y$ 代入㉕之第一式,解得 $z_0=\pm\sqrt{x^2+z^2}$.再代入㉖之第一式得

$$F(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0, \tag{11.9}$$

这就是所求旋转曲面的方程.

同样的方法可以求得上述母曲线$\begin{cases}F(y,z)=0,\\ x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转,所得旋转曲面的方程为

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{11.10}$$

同样的方法,我们还可以得到:

xy 面上的曲线$\begin{cases}G(x,y)=0,\\ z=0\end{cases}$绕 x 轴旋转,所得旋转曲面的方程为

$$G(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0;$$

绕 y 轴旋转,所得旋转曲面的方程为

$$G(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$$

对于 zx 面上的曲线绕 x 轴及 y 轴旋转,所得旋转曲面的方程也有类似的结果.

于是,坐标平面上的一条曲线绕该坐标面上的一条坐标轴旋转所得旋转曲面方程的求法如下:

在该曲线在坐标平面上的方程中，保留与旋转轴同名的变量不动，而把另一个变量换成与旋转轴不同名的另两个变量的平方和的平方根.

例 8　将椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1,(a>b>0)\\ x=0\end{cases}$$

分别绕长轴(y 轴)及短轴(z 轴)旋转，求所得旋转曲面的方程.

解　y 轴为旋转轴时，保留方程 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$ 中的 y 不动，将 z 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，便得所求旋转曲面的方程

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2+z^2}{b^2}=1; \tag{11.11}$$

z 轴为旋转轴时，旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{11.12}$$

□

曲面(11.11)叫做**长球面**，如图形状 11-5①，曲面(11.12)叫做**扁球面**，形状如图 11-5②，它们统称为**旋转椭球面**.

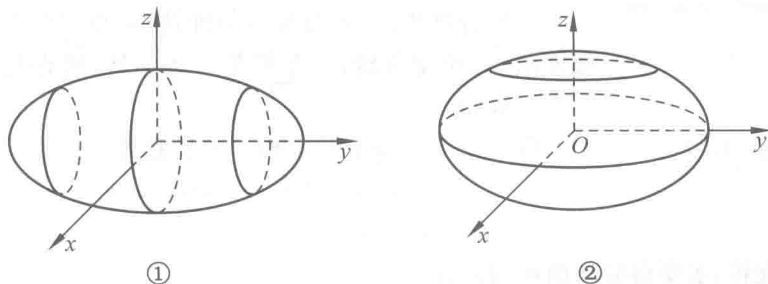


图　11-5

双曲线
$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{cases}\quad(b>0,c>0)$$

绕虚轴(z 轴)旋转，所得旋转曲面的方程为

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1; \tag{11.13}$$

绕实轴(y 轴)旋转，所得旋转曲面的方程为

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2+z^2}{c^2}=1. \tag{11.14}$$

曲面(11.13)叫做**旋转单叶双曲面**，形状如图 11-6①. 曲面(11.14)叫做**旋转双叶双曲面**，形状如图 11-6②.

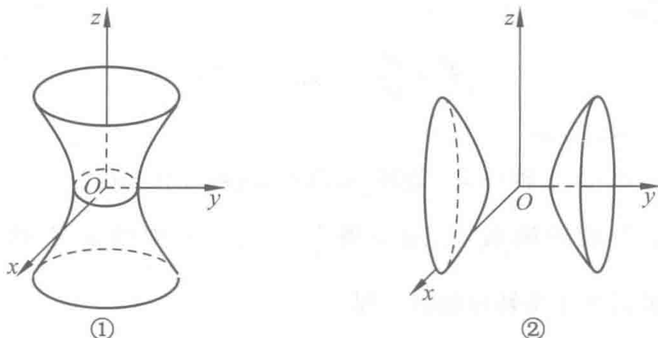


图 11-6

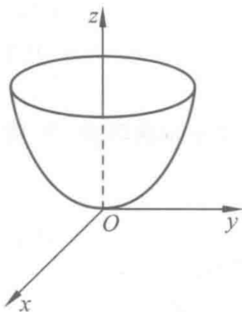


图 11-7

抛物线$\begin{cases} y^2=2pz, \\ x=0 \end{cases}$ $(p>0)$绕其对称轴(z 轴)旋转，所得旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=2pz. \tag{11.15}$$

曲面(11.15)叫**旋转抛物面**，其形状如图 11-7.

二平行直线，一条绕另一条旋转，所得旋转曲面为直圆柱面. 二相交直线，一条绕另一条旋转，所得旋转曲面为直圆锥面.

例 9 yz 平面上与 z 轴不相交的圆

$$\begin{cases} (y-a)^2+z^2=b^2, (a>b>0) \\ x=0 \end{cases}$$

绕 z 轴旋转，求所得旋转曲面的方程.

解 在方程$(y-a)^2+z^2=b^2$ 中保留 z 不动，将 y 换成$\pm\sqrt{x^2+y^2}$，得

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=b^2,$$

即

$$x^2+y^2+z^2+a^2-b^2=\pm 2a\sqrt{x^2+y^2},$$

两边平方得

$$(x^2+y^2+z^2+a^2-b^2)^2=4a^2(x^2+y^2). \tag{11.16}$$

这就是所求旋转曲面的方程. □

这个曲面的形状如图 11-8，像个轮胎，叫**环面**.

因为母曲线为$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0, \end{cases}$ 旋转轴为 z 轴的旋转曲面的方程是 $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$，所以如果一个方程具有形式$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$，那么

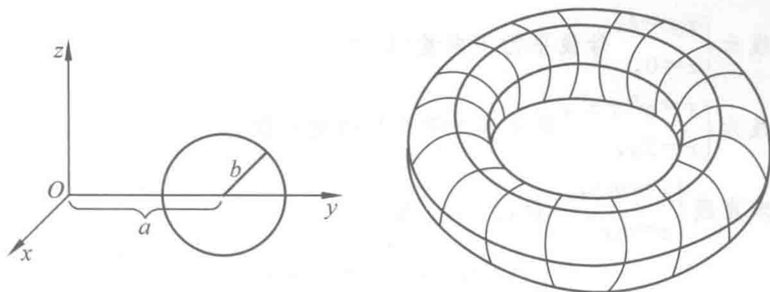


图　11-8

它一定表示旋转曲面，且一条母曲线为$\begin{cases}F(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}$旋转轴为$z$轴. 根据这一结论，我们可以判断某些方程表示旋转曲面.

例 10　试证

$$(y^2+z^2)(1+x^2)^2=1$$

是旋转曲面，并求它的母曲线及旋转轴.

证　因为已知方程可以化成$\sqrt{y^2+z^2}=\dfrac{\pm1}{1+x^2}$，具有形式$F(\pm\sqrt{y^2+z^2},x)=0$，所以它是以$\begin{cases}y=\dfrac{\pm1}{1+x^2},\\z=0\end{cases}$为母曲线，以$x$轴为旋转轴的旋转曲面. 也可以看成是以$\begin{cases}z=\dfrac{\pm1}{1+x^2},\\y=0\end{cases}$为母曲线，以$x$轴为旋转轴的旋转曲面. □

习　题　十　一

1. 求直线族

$$\begin{cases}x+y-tz=0,\\x-y-\dfrac{z}{t}=0\end{cases}$$

所产生的曲面的方程.

2. 求柱面方程：

①准线为$\begin{cases}y^2=2z,\\x=0,\end{cases}$母线平行于$x$轴；

②准线为$\begin{cases} xy=4, \\ z=0, \end{cases}$母线平行于向量$(1,-1,1)$；

③准线为$\begin{cases} x=y^2+z^2, \\ x=2z, \end{cases}$母线垂直于准线所在平面.

3. 求与定直线$\begin{cases} y=mx, \\ z=nx \end{cases}$平行，且与定圆

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ z=0 \end{cases}$$

相交的直线所产生的曲面的方程.

4. 求下列曲线在三个坐标面上的射影柱面的方程：

① $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ x^2+4y^2-z^2=0; \end{cases}$　　② $\begin{cases} z=4-x^2-\dfrac{1}{4}y^2, \\ z=3x^2+\dfrac{1}{4}y^2. \end{cases}$

5. 求锥面方程：

①顶点在原点，准线为$\begin{cases} y^2=2px, \\ z=k; \end{cases}$

②顶点为$(0,-a,0)$，准线为$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ y+z=a; \end{cases}$

③顶点为$(4,0,-3)$，准线为$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1, \\ z=0. \end{cases}$

6. 求过原点所作球面

$$(x-5)^2+(y+1)^2+z^2=16$$

的切线的轨迹方程.

7. 已知准线为立方抛物线$\begin{cases} y=x^3, \\ z=0, \end{cases}$

①求以(l,m,n)为母线方向向量的柱面方程；

②求以(a,b,c)为顶点的锥面方程.

8. 求下列曲线绕指定轴旋转所得旋转曲面的方程：

①$\begin{cases} 4x^2+9y^2=36, \\ z=0, \end{cases}$绕 x 轴；

②$\begin{cases} y^2=2px, \\ z=0, \end{cases}$绕 y 轴；

③ $\begin{cases}(x-2)^2+y^2=1,\\ z=0,\end{cases}$ 绕 y 轴；

④ $\begin{cases}xy=a^2,\\ z=0,\end{cases}$ 绕这个曲线的渐近线；

⑤ $x-1=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{3}$，绕 z 轴；

⑥ $x-1=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z}{3}$，绕 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-2}$；

⑦ $\begin{cases}z=x^2,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ 绕 z 轴.

9. 将直线 $\dfrac{x}{\alpha}=\dfrac{y-\beta}{0}=\dfrac{z}{1}$ 绕 z 轴旋转，求这个旋转曲面的方程，并就 α 和 β 可能的值讨论这是什么曲面.

10. 求以 z 轴为旋转轴，以

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)\\ x=mz\end{cases}$$

为母曲线的旋转曲面的方程.

11. 说出下列方程表示的曲面名称：

① $\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}=1$；　② $xy=1$；

③ $4x^2+3y^2+4z^2=2$；　④ $x^2-y^2+z^2=-3$；

⑤ $4x^2+3y^2-4z^2=0$.

12. 根据下列方程的特点，指出表示何种曲面. 若是柱面，说出母线方向及一条准线；若是锥面，说出顶点及一条准线；若是旋转曲面，说出旋转轴及一条母曲线.

① $x^2+2xy-3y^2=1$；

② $x^2+2xy-3y^2+z^2=0$；

③ $x^2+y^2-3z^2+2z-1=0$.

§12 空间曲线和曲面的参数方程

1. 空间曲线的参数方程

在空间直角坐标系中，把点的坐标 x,y,z 表示成某个变量 t 的函数表示式

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \quad (a\leqslant t\leqslant b) \\ z=h(t), \end{cases} \tag{12.1}$$

如果满足

1° 由 t 的取值范围内的任一值通过(12.1)所决定的点(x,y,z)都在一条曲线 C 上；

2° 曲线 C 上每一点(x,y,z)都可以由 t 的取值范围内的某个值通过(12.1)得到，则称方程(12.1)为**曲线 C 的参数方程**，t 叫做**参数**.

参数方程(12.1)也可写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \quad a\leqslant t\leqslant b \tag{12.2}$$

这里 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{r}(t)=(f(t),g(t),h(t))$.

在考虑参数方程表示的图形时，必须注意到参数 t 的变化范围.

从参数方程(12.1)中，消去参数 t，便得到空间曲线的一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$$

在实际问题中，特别是求物体运动的轨迹时，常常用参数方程.

例 1 参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \quad (0\leqslant\theta<2\pi) \\ z=0 \end{cases}$

表示什么曲线？

解 消参数得

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2, \\ z=0, \end{cases}$$

表示 xy 面上的一个圆，圆心在原点，半径为 r. □

例 2 求参数方程 $\boldsymbol{r}=(a\cos\theta,b\sin\theta,c)$ $(0\leqslant\theta<2\pi)$所表示的曲线的一般方程.

解　将已知参数方程化成坐标形式为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta, \quad (0\leqslant\theta<2\pi)\\ z=c.\end{cases}$$

消参数得

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c,\end{cases}$$

表示平面 $z=c$ 上的一个椭圆. □

例 3　一个动点绕定直线作等角速度圆周运动,同时沿该直线的方向作等速直线运动,这个动点的轨迹叫**圆柱螺线**. 试建立圆柱螺线的方程.

解　建立坐标系,取定直线为 z 轴,动点运动的起始点为 $P_0(a,0,0)(a>0)$. 设等角速度为 ω,等速度为 v.

取时间 t 为参数. 当时刻 t 时,动点的位置在 $P(x,y,z)$. 设 P 在 xy 上的射影为 Q,依题设 Q 在以原点为中心,以 $|\overrightarrow{OP_0}|=a$ 为半径的圆上,且 $\overrightarrow{OQ}$与 x 轴的夹角为 $\theta=\omega t$,又$\overrightarrow{QP}=vt\boldsymbol{k}$. 所以有

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP},$$

即　$$\boldsymbol{P}=(a\cos\omega t)\boldsymbol{i}+(a\sin\omega t)\boldsymbol{j}+(vt)\boldsymbol{k}. \tag{12.3}$$

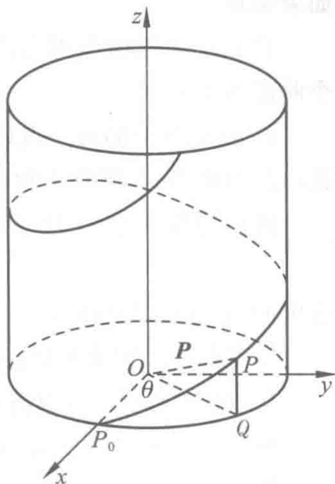


图　12-1

这就是圆柱螺线的向量形式的参数方程. 化成坐标表示为

$$\begin{cases}x=a\cos\omega t,\\ y=a\sin\omega t, \quad (-\infty<t<+\infty)\\ z=vt.\end{cases} \tag{12.4}$$

这就是圆柱螺线的坐标形式的参数方程.

从(12.4)中消去参数 t,得

$$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ y=a\sin\left(\dfrac{\omega}{v}z\right).\end{cases} \tag{12.5}$$

这就是圆柱螺线的一般方程. □

从(12.5)的第一个方程可以看出,这条曲线全部落在一个直圆柱面上,圆

柱螺线因此而得名.

2. 曲面的参数方程

在空间直角坐标系中,把点的坐标 x,y,z 表示成两个变量 u,v 的函数表达式

$$\begin{cases} x=f(u,v), \\ y=g(u,v), \quad (a\leqslant u\leqslant b,\ c\leqslant v\leqslant d) \\ z=h(u,v), \end{cases} \tag{12.6}$$

如果满足

1° 由 u,v 取值范围内的每一对值,通过(12.6)所决定的点 (x,y,z) 都在一个曲面 S 上;

2° 曲面 S 上的每一点 (x,y,z),都可以由 u,v 的取值范围内的某一对值通过(12.6)而得到,则称方程(12.6)为**曲面 S 的参数方程,u,v** 叫做**参数**.

曲面的参数方程(12.6)也可写成向量形式

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v), \tag{12.7}$$

这里 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$,$\boldsymbol{r}(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v))$.

在考虑(12.6)表示的图形时,要注意参数 u,v 的取值范围.

从参数方程(12.6)中消去参数 u,v,一般可得曲面的一般方程 $F(x,y,z)=0$.

现在我们来讨论平面、球面、柱面、锥面和旋转曲面的参数方程.

例 4 已知一个定点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 及两个不共线的定向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 求过 P_0 且与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 皆平行的平面 α 的参数方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为平面 α 上任一点,则 $\overrightarrow{P_0P},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 三个向量共面. 因此有

$$\overrightarrow{P_0P}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}, \quad (-\infty<\lambda,\ \mu<+\infty)$$

即

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}, \quad (-\infty<\lambda,\ \mu<+\infty) \tag{12.8}$$

此处 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_0$ 分别是动点 P 和定点 P_0 的向径. 方程(12.8)称为**平面的向量形式的参数方程**.

化成坐标表示为:

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda a_1+\mu b_1, \\ y=y_0+\lambda a_2+\mu b_2, \qquad (-\infty<\lambda,\ \mu<+\infty) \\ z=z_0+\lambda a_3+\mu b_3. \end{cases} \tag{12.9}$$

方程(12.9)称为**平面的坐标形式的参数方程**. □

例 5　求以原点为球心，R 为半径的球面的参数方程.

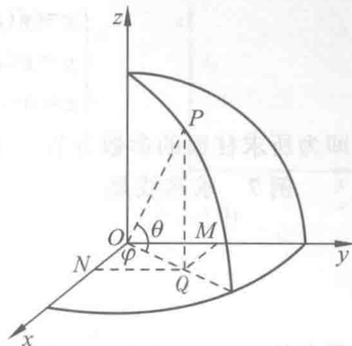


图　12-2

解　球面上任一点 $P(x,y,z)$ 在 xy 面上的射影为 Q（如图 12-2）. Q 在 x 轴及 y 轴上的射影分别为 N 及 M. 设 $\angle NOQ=\varphi$，$\angle QOP=\theta$，关于角度 φ 及 θ 有如下规定：φ 以 x 轴正向为始边，逆时针为正. P 点在上半球面时，θ 角为正；在下半球面时，θ 为负.

由图 12-2 有

$$\begin{cases} x=|OQ|\cos\varphi, \\ y=|OQ|\sin\varphi, \\ z=|OP|\sin\theta. \end{cases}$$

由题设 $|OP|=R$，而 $|OQ|=|OP|\cos\theta$. 即 $|OQ|=R\cos\theta$，所以

$$\begin{cases} x=R\cos\theta\cos\varphi, \\ y=R\cos\theta\sin\varphi, \\ z=R\sin\theta. \end{cases} \quad \left(\begin{array}{c} 0\leqslant\varphi<2\pi \\ -\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right) \tag{12.10}$$

这就是所求的**球面的参数方程**.　□

参数方程(12.10)中的参数 φ 和 θ，在地理上通常称为**经度**和**纬度**. 地球上每一点的位置，由它的经度和纬度完全决定. 经度和纬度又称为**地理坐标**.

例 6　求准线是

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \\ z=h(t), \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

母线平行于 (l,m,n) 的柱面方程.

解　在准线上任取一点 $P_0(f(t_0),g(t_0),h(t_0))$. 过 P_0 平行于 (l,m,n) 的直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=f(t_0)+lu, \\ y=g(t_0)+mu, \\ z=h(t_0)+nu, \end{cases} \quad (-\infty<u<+\infty) \tag{12.11}$$

其中 u 为参数. 当 P_0 取遍准线上所有的点时，所有的直线(12.11)就组成所求的柱面. 也就是说当 t_0 取所有可能的值时，u 取所有的值，方程(12.11)所决定的点 (x,y,z) 就组成所求的柱面. 于是方程

$$\begin{cases} x=f(t)+lu, \\ y=g(t)+mu, \\ z=h(t)+nu, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a\leqslant t\leqslant b, \\ -\infty<u<+\infty \end{pmatrix} \tag{12.12}$$

即为所求柱面的参数方程，t,u 为参数. □

例 7 求准线是

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \quad (a\leqslant t\leqslant b) \\ z=h(t), \end{cases}$$

顶点是(a,b,c)的锥面方程.

解 仿照例 6 的方法，可以得到所求锥面的参数方程为

$$\begin{cases} x=a+(f(t)-a)u, \\ y=b+(g(t)-b)u, \\ z=c+(h(t)-c)u. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a\leqslant t\leqslant b, \\ -\infty<u<+\infty \end{pmatrix} \tag{12.13}$$

□

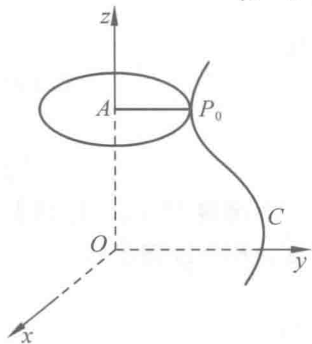


图 12-3

例 8 求母曲线为

$$C:\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \quad (a \leqslant t \leqslant b) \\ z = h(t), \end{cases}$$

z 轴为旋转轴的旋转曲面的方程.

解 在 C 上任取一点$P_0(f(t_0),g(t_0),h(t_0))$. 过 P_0 点的纬圆是在平面 $z=h(t_0)$上，以 $A(0,0,h(t_0))$为中心，以$|AP_0|=\sqrt{[f(t_0)]^2+[g(t_0)]^2}$为半径的圆(如图 12-3)，这个圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{[f(t_0)]^2+[g(t_0)]^2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{[f(t_0)]^2+[g(t_0)]^2}\sin\theta, \ (0\leqslant\theta<2\pi) \\ z=h(t_0). \end{cases} \tag{12.14}$$

当 P_0 取遍曲线 C 上所有点时，即参数 t 取所有可能的值时，所有的纬圆(12.14)就组成所求的旋转曲面. 于是所求的旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{[f(t)]^2+[g(t)]^2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{[f(t)]^2+[g(t)]^2}\sin\theta, \\ z=h(t). \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a\leqslant t\leqslant b \\ 0\leqslant\theta<2\pi \end{pmatrix} \tag{12.15}$$

□

例 9 求一直线 l_1 绕与它异面的另一直线 l_2 旋转所产生的旋转曲面的方程.

解　建立坐标系,使旋转轴 l_2 为 z 轴,直线 l_1 的方程为

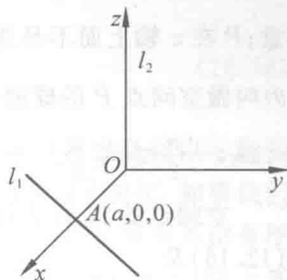


图　12-4

$$\begin{cases}x=a,\\ y=t,(ab\neq 0)\\ z=bt.\end{cases}$$

(参看第二章 §9 附注)

利用例 8 的结果,得所求旋转曲面的参数方程为

$$\begin{cases}x=\sqrt{a^2+t^2}\cos\theta,\\ y=\sqrt{a^2+t^2}\sin\theta,\\ z=bt.\end{cases}\quad\begin{pmatrix}0\leqslant\theta<2\pi,\\ -\infty<t<+\infty\end{pmatrix}$$

消参数 θ 和 t,得

$$x^2+y^2=a^2+\frac{z^2}{b^2},$$

即

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2b^2}=1,$$

表示旋转单叶双曲面. □

这个例子告诉我们,旋转单叶双曲面可以由直线产生.

3. 球面坐标和柱面坐标

由公式(12.10),我们已知球心在原点、半径为 R 的球面的参数方程为

$$\begin{cases}x=R\cos\theta\cos\varphi,\\ y=R\cos\theta\sin\varphi,\\ z=R\sin\theta.\end{cases}\quad\begin{bmatrix}-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant\varphi<2\pi\end{bmatrix}$$

空间中与原点距离为 R 的任意一点,总可以看成是在以原点为球心,半径为 R 的球面上,它的位置由一组 φ,θ 的值完全决定,它在空间直角坐标系中的坐标可由(12.10)求出. 如果我们把半径 R 也看成变数,并用 ρ 表示时,空间中任意一点 P 的位置则可由有序三数组 (ρ,φ,θ) 完全决定. 它在直角坐标系中的坐标由下式(12.16)求出($\rho=|OP|$,φ,θ 的规定见例 5).

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\cos\varphi, & (\rho\geqslant 0)\\ y=\rho\cos\theta\sin\varphi, & (0\leqslant\varphi<2\pi)\\ z=\rho\sin\theta. & \left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}\tag{12.16}$$

除了 z 轴上的点以外,P 和 (ρ,φ,θ) 是一一对应的,(P 为原点时,$\rho=0$,φ 与 θ 任

意；P 在 z 轴上而不是原点时，$\theta=-\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}$，φ 任意）. 我们把有序三数组 (ρ,φ,θ) 叫做空间点 P 的**球面坐标（或空间极坐标）**，记作 $P(\rho,\varphi,\theta)$，这里 $\rho\geqslant 0, 0\leqslant\varphi<2\pi, -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

空间点的直角坐标 (x,y,z) 和球面坐标 (ρ,φ,θ) 之间的变换公式为 (12.16) 及

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\\ \theta=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{cases}\tag{12.17}$$

例 10 在球面坐标里，下列方程各表示什么曲面：

①$\rho=a$（常数）； ②$\varphi=\alpha$（常数）；

③$\theta=\beta$（常数）.

解 ①表示原点为中心，半径为 a 的球面. 由 (12.17) 得到它的直角坐标系中的方程为

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

②表示以 z 轴为界的半平面，它与 zx 面夹角为 α. 由 (12.17) 得它在直角坐标系中的方程为

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

即 $\tan\alpha=\frac{y}{x}$，亦即

$$y=x\tan\alpha\quad(x\cos\alpha\geqslant 0, y\sin\alpha\geqslant 0).$$

③表示以原点为顶点，z 轴为轴，半顶角为 $\frac{\pi}{2}-\beta$ 的一个直圆锥面（只有一腔）. 由 (12.17) 得它在直角坐标系中的方程为

$$\sin\beta=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

即

$$(x^2+y^2+z^2)\sin^2\beta=z^2,$$

亦即

$$x^2+y^2-z^2\cot^2\beta=0\quad(z\sin\beta\geqslant 0).$$

□

直圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos\varphi, & (0\leqslant\varphi<2\pi) \\ y=R\sin\varphi, & (-\infty<z<+\infty) \\ z=z, \end{cases} \tag{12.18}$$

其中 φ,z 为参数. 空间中与 z 轴距离为 R 的任一点，总可以看成是在以 z 轴为轴，以半径为 R 的直圆柱面上，该点的位置由 φ,z 的一组值完全决定. 如果我们把半径 R 也看成变数并用 $\rho(\rho\geqslant 0)$ 表示时，空间中任一点 P 的位置则可由有序三数组 (ρ,φ,z) 完全决定，该点在空间直角坐标系中的坐标 (x,y,z) 由下式 (12.19) 求出：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, & (\rho\geqslant 0) \\ y=\rho\sin\varphi, & (0\leqslant\varphi<2\pi) \\ z=z. & (-\infty<z<+\infty) \end{cases} \tag{12.19}$$

空间除了 z 轴上的点以外，P 点和 (ρ,φ,z) 是一一对应的（z 轴上的点，$\rho=0$，φ 任意）. 我们把有序三数组 (ρ,φ,z) 叫做空间点 P 的**柱面坐标**（或称**空间半极坐标**），记作 $P(\rho,\varphi,z)$，这里 $\rho\geqslant 0$，$0\leqslant\varphi<2\pi$，$-\infty<z<+\infty$.

空间点的直角坐标 (x,y,z) 和柱面坐标 (ρ,φ,z) 之间的变换关系为 (12.19) 及

$$\begin{cases} \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \\ \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ z=z. \end{cases} \tag{12.20}$$

例 11 在柱面坐标里，下列方程表示什么曲面？

① $\rho=a$（常数）； ② $\varphi=\alpha$（常数）.

解 ①表示以 z 轴为轴，半径为 a 的直圆柱面，它的直角坐标方程为 $x^2+y^2=a^2$.

②表示以 z 轴为界的半平面，它的直角坐标方程为

$$y=x\tan\alpha \ (x\cos\alpha\geqslant 0, y\sin\alpha\geqslant 0).$$

□

习 题 十 二

1. 把下列曲线的参数方程化成一般方程：

① $\begin{cases} x=(t+1)^2, \\ y=2(t+1), & (-\infty<t<+\infty) \\ z=-(2t+1); \end{cases}$

② $\begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=2+\sin\theta, \quad (0\leqslant\theta<2\pi) \\ z=2. \end{cases}$

2. 证明曲线

$$\begin{cases} x=3\sin t, \\ y=4\sin t, \quad (0\leqslant t<2\pi) \\ z=5\cos t \end{cases}$$

是一个圆,并求该圆的中心及半径.

3. 证明曲线

$$\begin{cases} x=\sin 2\theta, \\ y=1-\cos 2\theta, \quad (0\leqslant\theta<2\pi) \\ z=2\cos\theta \end{cases}$$

位于球面上、直圆柱面上,也位于抛物柱面上.

4. 证明曲线

$$\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2+t^4}, \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2+t^4}, \quad (-\infty<t<+\infty) \\ z=\dfrac{t^3}{1+t^2+t^4} \end{cases}$$

在一球面上(称为**球面曲线**),且求所在球面的方程.

5. 证明下列曲线皆为平面曲线,且求所在平面的方程:

① $\begin{cases} x=a\cos^2 t, \\ y=a\sin^2 t, \quad (a>0) \\ z=a\sin 2t; \quad (0\leqslant t<2\pi) \end{cases}$

② $\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{1-t}, \\ y=\dfrac{1}{1-t^2}, \quad (t\neq\pm 1) \\ z=\dfrac{1}{1+t}. \end{cases}$

6. 求下列曲线的参数方程:

① $\begin{cases} y^2=4z, \\ 4x+z^2=0; \end{cases}$ ② $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y^2+z^2=1. \end{cases}$

7. 讨论下列参数方程各表示什么图形：

① $\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=\sqrt{1-u^2-v^2}; \end{cases}$ $\quad (u^2+v^2\leqslant 1)$

② $\begin{cases} x=a\cos u, \\ y=b\sin u, \\ z=v; \end{cases}$ $\quad (0\leqslant u<2\pi, -\infty<v<+\infty)$

③ $\begin{cases} x=2u+v, \\ y=u+2v, \\ z=u+v+1. \end{cases}$ $\quad (-\infty<u,v<+\infty)$

8. 试证下列二方程

$$\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \\ z=u^2, \end{cases} \quad \begin{matrix} (-\infty<u<+\infty) \\ (0\leqslant v<2\pi) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2}, \\ y=\dfrac{v}{u^2+v^2}, \\ z=\dfrac{1}{u^2+v^2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (-\infty<u,v<+\infty) \\ (u^2+v^2\neq 0) \end{matrix}$$

表示同一曲面，并说明其形状.

9. 在直圆柱面的参数方程

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \\ z=v \end{cases} \quad \begin{matrix} (0\leqslant\theta<2\pi) \\ (-\infty<v<+\infty) \end{matrix}$$

中，$\theta=\theta_0$ 和 $v=v_0$（θ_0，v_0 为常数）各表示怎样的图形？

10. 应用参数方程解习题十一第 8 题之⑤，⑦及第 10 题.

11. 求§11 例 9 之环面的参数方程.

12. 用参数方程解习题十一第 2 题之②及第 5 题之③.

13. 把 $x^2+y^2-2ax=0$ 写成用柱面坐标表示的方程.

§13 二次曲面

用一个二次方程表示的曲面，叫做**二次曲面**. 我们在§11中所介绍的三种二次柱面及一种二次锥面，它们的方程都是二次的，所以它们都是二次曲面. 本节再介绍六种典型的二次曲面，它们是两种椭球面(实的和虚的)、两种双曲面(单叶的和双叶的)和两种抛物面(椭圆的和双曲的). 我们先给出它们的标准方程，然后通过方程来讨论这些曲面的形状.

1. 椭球面(或椭圆面)

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0, b>0, c>0) \tag{13.1}$$

表示的曲面，叫做**(实)椭球面**. 方程(13.1)叫做**椭球面的标准方程**.

我们从以下几个方面，来讨论方程(13.1)所表示的图形的几何性质和形状.

1° 对称性

在方程(13.1)中用$(-x,y,z)$代替(x,y,z)方程不变，说明若点$P(x,y,z)$在曲面上，则P点关于yz面的对称点$P'(-x,y,z)$也在曲面上，即曲面关于yz面对称. 同样，分别用$(x,-y,z)$和$(x,y,-z)$代替方程(13.1)中的(x,y,z)，方程不变，所以曲面关于zx面和xy面也对称.

用$(x,-y,-z)$代替方程(13.1)中的(x,y,z)方程不变，说明若点(x,y,z)在曲面上，则该点关于x轴的对称点$(x,-y,-z)$也在曲面上，即曲面关于x轴对称. 同样可知曲面关于y轴，z轴也对称.

用$(-x,-y,-z)$代替方程(13.1)中的(x,y,z)方程不变，说明若点(x,y,z)在曲面上，则该点关于原点的对称点$(-x,-y,-z)$也在曲面上，即曲面关于原点对称.

2° 范围——曲面是否有界

因为方程(13.1)表示三个正数相加等于1，所以有

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1,\ \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1,\ \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$$

即

$$|x|\leqslant a, |y|\leqslant b, |z|\leqslant c.$$

这说明曲面是在六个平面 $x=\pm a, y=\pm b, z=\pm c$ 所围成的长方体中,也就是说,椭球面是有界的,它上面的点不能无限地跑到远方去,这是椭球面在二次曲面中最突出的特点.

3° 与各坐标轴及各坐标面的交线

在方程(13.1)中令 $y=z=0$,可得椭球面与 x 轴的交点 $A(a,0,0)$ 和 $A'(-a,0,0)$. 同样可得椭球面与 y 轴的交点 $B(0,b,0)$ 和 $B'(0,-b,0)$. 与 z 轴的交点 $C(0,0,c)$ 和 $C'(0,0,-c)$.

椭球面与三个坐标面的交线分别为

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0, \end{cases} \quad ①$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0, \end{cases} \quad ②$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases} \quad ③$$

它们都是椭圆.

4° 为了进一步了解一个曲面的形状,我们用一组平行平面(通常用与某个坐标面平行的平面)去截这个曲面,得到一组交线(称为**截口曲线**,简称**截口**),通过这组平行平面上的截口(简称为**平行截口**)的形状来分析曲面的大体形状. 这种利用平行截口来研究曲面形状的方法,简称为**平行截割法**(或**平截线法**).

我们用平行于 xy 面的平面 $z=h, |h|\leqslant c$,来截曲面,截口为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2}, \\ z=h. \end{cases} \quad ④$$

当 $|h|\leqslant c$ 时它总是一个椭圆,它的两个半轴分别为

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad 及 \quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

它的两对顶点分别为 $\left(\pm a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}},0,h\right)$ 及 $\left(0,\pm b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}},h\right)$. 而这两对顶点恰又分别在 zx 面及 yz 面的截口椭圆②及①上.

当 h 由 $-c$ 变到 $+c$ 时,由④所得到的上述这一族位于平行平面上的椭圆就

组成椭球面(13.1).也就是说,椭球面(13.1)是由一个椭圆④变动产生的,这个椭圆在变动中始终保持所在平面与 xy 面平行,且它的两对顶点始终分别在两个定椭圆②及①上滑动.椭球面的形象是一个压扁了的旋转椭球面.

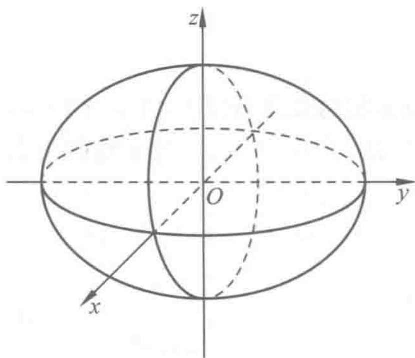


图 13-1

椭球面的图形如图 13-1.

椭球面的对称平面称为**主平面**,对称轴称为**主轴**,对称中心称为**中心**.椭球面与对称轴的交点称为**顶点**,因此椭球面有三个主平面,三条主轴,一个中心,六个顶点.

当方程(13.1)中 $a>b>c>0$ 时,a,b,c 分别称为**椭球面的半长轴,半中轴和半短轴**.

椭球面(13.1)的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta\cos\varphi, & \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y=b\cos\theta\sin\varphi, & \\ z=c\sin\theta. & (0\leqslant\varphi<2\pi) \end{cases} \tag{13.2}$$

2. 虚椭球面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{13.3}$$

表示的曲面,其上没有实点,称为**虚椭球面**.方程(13.3)称为**虚椭球面的标准方程**.

3. 单叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0,b>0,c>0) \tag{13.4}$$

表示的曲面叫**单叶双曲面**,方程(13.4)叫**单叶双曲面的标准方程**.

完全仿照对椭球面的讨论,我们得到:

单叶双曲面关于三个坐标面,三个坐标轴及原点都是对称的,图形可以无限伸展.

曲面(13.4)与 x 轴及 y 轴有两对交点,称为单叶双曲面的**顶点**.z 轴与单叶

双曲面无交点，叫做单叶双曲面的**虚轴**.



曲面(13.4)在三个坐标面上的截口分别为

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\end{cases} \tag{⑤}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\end{cases} \tag{⑥}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0.\end{cases} \tag{⑦}$$

用平面 $z=h$ 去截，截口为椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases} \tag{⑧}$$

它的两对顶点分别在 zx 面和 yz 面的截口双曲线⑥及⑤上. 当 h 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，椭圆族⑧就组成单叶双曲面(13.4). 因此它可以看成是由一个椭圆变动产生的，该椭圆在变动过程中所在平面始终平行于 xy 平面，且它的两对顶点始终在两个定双曲线⑥及⑤上滑动. 单叶双曲面的形象是一个压扁了的旋转单叶双曲面.

截口椭圆⑧当 $h=0$ 时，它的长短轴最小，称为**单叶双曲面的腰椭圆**.

单叶双曲面(13.4)的图形如图 13-2.

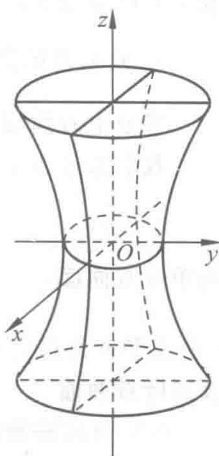


图　13-2

4. 双叶双曲面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a>0b, b>0, c>0) \tag{13.5}$$

表示的曲面，称为**双叶双曲面**. 方程(13.5)称为**双叶双曲面的标准方程**.

完全仿照对椭球面的讨论，可以了解双叶双曲面的大致形状. 曲面没有点在平面 $z=c$ 与 $z=-c$ 之间，曲面分为两叶. 双叶双曲面的形象是一个压扁了的旋转双叶双曲面.

双叶双曲面(13.5)的图形如图 13-3.

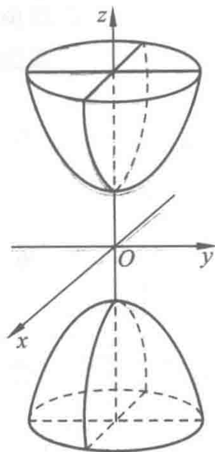


图 13-3

单叶双曲面和双叶双曲面统称为**双曲面**.

椭球面和双曲面都有唯一的中心(对称中心),称为**中心型二次曲面**.

方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \text{ 与 } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

表示的曲面,也都是单叶双曲面.同样,方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \text{ 与 } -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

表示的曲面,也都是双叶双曲面.

椭球面和双曲面的标准方程,可以统一写为

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=1 \quad (PQR\neq 0),$$

当 P,Q,R 皆正时,表示椭球面;当 P,Q,R 皆负时,表示虚椭球面;当 P,Q,R 两正一负时,表示单叶双曲面;当 P,Q,R 一正两负时,表示双叶双曲面.

5. 双曲面的渐近锥面

平面上双曲线有渐近线,与之相仿,在空间,双曲面有渐近锥面.

我们来考查二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \tag{9}$$

与单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{10}$$

及双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \tag{11}$$

之间的关系,这里三式中的 a,b,c 相同.

平面 $z=h$ 与这三个曲面的交线依次为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h,\end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h\end{cases} \tag{13}$$

及
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h.\end{cases} \tag{⑭}$$

当$|h|>c$时，这三个交线都是椭圆，它们的两个半轴依次是

$$a_1=\frac{a}{c}|h|,\quad b_1=\frac{b}{c}|h|;$$

$$a_2=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2},\quad b_2=\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$$

及
$$a_3=\frac{a}{c}\sqrt{h^2-c^2},\quad b_3=\frac{b}{c}\sqrt{h^2-c^2},$$

且对于一切$h(|h|>c)$，总有

$$a_3<a_1<a_2,\quad b_3<b_1<b_2,$$

即椭圆⑫总介于椭圆⑭及⑬之间(如图 13-4).

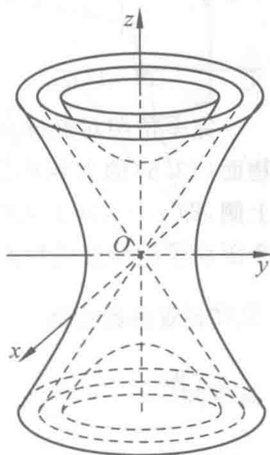


图 13-4

当$|h|\to\infty$，有

$$\begin{aligned}\lim(a_2-a_3)&=\lim\frac{a}{c}\left(\sqrt{h^2+c^2}-\sqrt{h^2-c^2}\right)\\&=\lim\frac{2ac}{\sqrt{h^2+c^2}+\sqrt{h^2-c^2}}=0.\end{aligned}$$

同样有$\lim(b_2-b_3)=0$.

这说明，当$|h|$无限增大时，单叶双曲面和双叶双曲面的截口椭圆无限接近，而锥面的截口椭圆总界于它们之间，所以这三个截口椭圆都无限接近. 换句话说，当无限地远离xy面时，单叶双曲面⑩和双叶双曲面⑪都与锥面⑨互相无限地逼近，我们称锥面⑨为单叶双曲面⑩及双叶双曲面⑪的**渐近锥面**，而双曲面⑩和⑪称为**一对共轭的双曲面**.

每个过z轴的平面交双曲面⑩和⑪于两条双曲线，而与锥面⑨相交所得的二相交直线，恰是上述两条双曲线的渐近线. 特别地，zx面交双曲面⑩，⑪得一对共轭双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\pm1,\\ y=0,\end{cases} \tag{⑮}$$

而与锥面⑨的交线

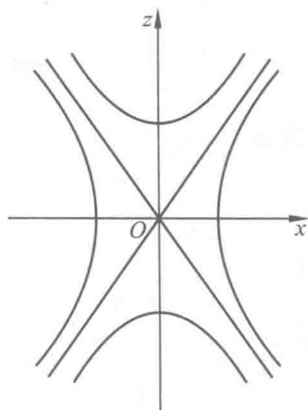


图 13-5

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ z=0, \end{cases}$$

恰是⑮的公共渐近线(如图 13-5).

6. 椭圆抛物面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (a>0,b>0) \tag{13.6}$$

表示的曲面叫做**椭圆抛物面**,方程(13.6)叫做**椭圆抛物面的标准方程**.

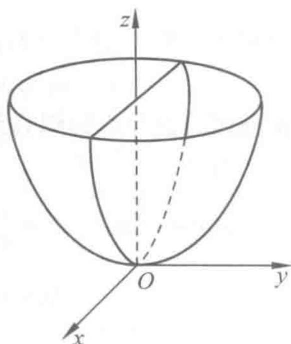


图 13-6

完全仿照对椭球面的讨论,我们可以了解椭圆抛物面(13.6)的大致形状.它的整个曲面都在 xy 面的上侧,即 $z\geqslant0$,向上无限伸展.椭圆抛物面的形象是一个压扁了的旋转抛物面,它的图形如图 13-6.

7. 双曲抛物面

方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad (a>0,b>0) \tag{13.7}$$

表示的曲面,叫**双曲抛物面**.方程(13.7)称为**双曲抛物面的标准方程**.

完全仿照对椭球面的讨论,我们得到:

双曲抛物面关于 zx 面和 yz 面是对称的,因而关于 z 轴也是对称的,没有对称中心.它与坐标轴只有一个交点——原点.

三个坐标面上的截口曲线为

$$\begin{cases} y^2=-2b^2z, \\ x=0, \end{cases} \qquad ⑯$$

$$\begin{cases} x^2=2a^2z, \\ y=0, \end{cases} \qquad ⑰$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0, \\ z=0. \end{cases} \qquad ⑱$$

⑯和⑰分别是 yz 面和 zx 面上的抛物线,它们有共同的对称轴 z 轴和共同的顶

点，但开口方向相反.

为了进一步看出双曲抛物面的形状，我们用平行 xy 面的平面 $z=h$ 去截它，截口为

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h,\\ z=h.\end{cases} \tag{19}$$

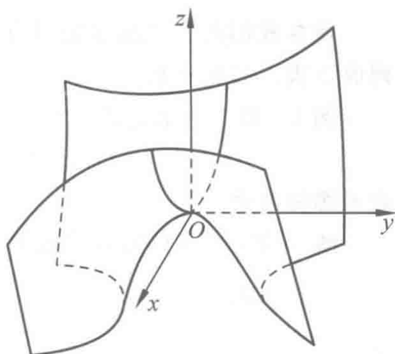


图　13-7

只要 $h\neq 0$，它总是双曲线：当 $h>0$ 时，实轴平行于 x 轴，虚轴平行于 y 轴，顶点 $(\pm\sqrt{2ha},0,h)$ 在抛物线⑰上；当 $h<0$ 时，实轴平行 y 轴，虚轴平行于 x 轴，顶点 $(0,\pm\sqrt{-2hb},h)$ 在抛物线⑯上. 当 $h=0$ 时，截口变成一对相交直线⑱.

当 h 由 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，变动的曲线⑲就产生双曲抛物面（如图 13-7）. 它在 xy 面上方的部分沿着 x 轴的两个方向上升，在 xy 面下方的部分沿着 y 轴的两个方向下降，大体形状像一只马鞍，所以双曲抛物面又称为**马鞍面**. 双曲抛物面和对称轴的交点，叫做它的**鞍点**.

这个曲面的形状比较复杂，为了进一步熟悉它，我们再用平行于 zx 的平面 $y=k$ 去截它，截口为

$$\begin{cases}x^2=2a^2\left(z+\dfrac{k^2}{2b^2}\right),\\ y=k.\end{cases} \tag{20}$$

不论 k 值如何，它总是一条抛物线，而且它的形状总和抛物线⑰完全相同，它的顶点 $\left(0,k,-\dfrac{k^2}{2b^2}\right)$ 总在抛物线⑯上.

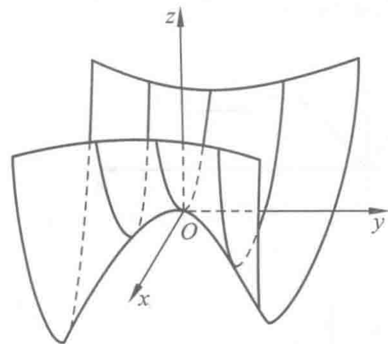


图　13-8

当 k 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$ 时，变动的抛物线⑳就产生双曲抛物面. 因此，双曲抛物面可以看成是由两条位于互相垂直的平面上的有公共对称轴及顶点，但开口方向相反的抛物线，其中一条抛物线使其顶点始终沿着另一条抛物线作平行移动产生的（如图 13-8）.

椭圆抛物面和双曲抛物面统称为**抛物**

面. 它们都没有对称中心，又叫做**无心二次曲面**.

椭圆抛物面和双曲抛物面的标准方程可以统一为

$$Px^2+Qy^2=2Rz,\ (PQR\neq 0)$$

当 P,Q 同号时，表示椭圆抛物面；当 P,Q 异号时，表示双曲抛物面.

8. 二次曲面标准方程小结

现在我们把二次曲面的所有各种情形(共 17 类)的图形和它们的标准方程列成下表.(表见下页)

例 1 就 λ 的值讨论方程

$$x^2+2y^2+\lambda z^2+2z+1=0$$

表示哪种曲面.

解 当 $\lambda\neq 0$ 时，方程可改写为

$$x^2+2y^2+\lambda\left(z+\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda}-1.$$

于是，

1° 当 $\lambda<0$ 时，表示双叶双曲面；

2° 当 $0<\lambda<1$ 时，表示椭球面；

3° 当 $\lambda=1$ 时，表示一点；

4° 当 $\lambda>1$ 时，表示虚椭球面.

当 $\lambda=0$ 时，方程可改写为

$$x^2+2y^2=-2\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

于是，

5° 当 $\lambda=0$ 时，表示椭圆抛物面. □

将上述讨论所得的结果，在 λ 轴上表示出来，如图 13-9.

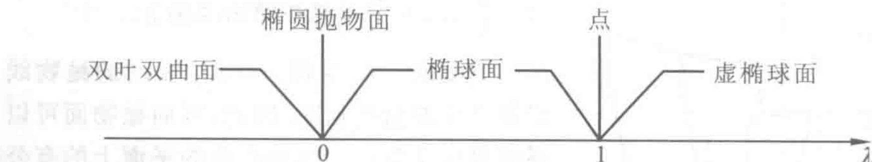


图 13-9

二次曲面标准方程小结

序号	标准方程	曲面名称	图形
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	椭球面	
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	虚椭球面	无实图形
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	点	
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	单叶双曲面	
5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	双叶双曲面	
6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	二次锥面	

续表

序号	标准方程	曲面名称	图形
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	椭圆抛物面	
8	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	双曲抛物面	
9	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	椭圆柱面	
10	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	虚椭圆柱面	无实图形
11	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	直线	
12	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲柱面	

续表

序号	标准方程	曲面名称	图形
13	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	相交平面	
14	$y^2=2px$	抛物柱面	
15	$x^2=a^2$	一对平行平面	
16	$x^2=-a^2$	一对虚平行平面	无实图形
17	$x^2=0$	一对重合平面	

习 题 十 三

1. 已知椭球面的主轴和坐标轴重合，且通过椭圆

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1,\\ z=0\end{cases}$$

及点$(1,2,\sqrt{23})$，求这个椭球面的方程.

2. 求平面 $x-2=0$ 与椭球面$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{4}=1$ 相交所得截口椭圆的方程，并求它的两个半轴长及顶点.

3. 由椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的中心(即原点)沿某一定方向(方向余弦为 λ,μ,ν)到曲面上的一点的距离是 r，试证

$$\frac{1}{r^2}=\frac{\lambda^2}{a^2}+\frac{\mu^2}{b^2}+\frac{\nu^2}{c^2}.$$

4. 在研究椭球面时，我们介绍了通过方程讨论曲面的几何性质及形状的方法. 试应用这个方法，

①讨论双叶双曲面(13.5)；

②讨论椭圆抛物面(13.6).

5. 已知单叶双曲面$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{4}=1$，

①求它的腰椭圆；

②求两个平面，使它们分别平行于 yz 面和 zx 面，而且与曲面的交线都是一对直线.

6. 平面 $x-mz=0$ 与单叶双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 相交，问 m 取何值时，交线为椭圆？何时为双曲线？

7. 求过 x 轴，且与单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>b)$的交线是圆的平面.

8. 已知椭球面 $x^2+6y^2+2z^2=8$，求过 z 轴且与该椭球面的交线是圆的平面.

9. 用平面 $x+my-z=0$ 去截已知椭圆抛物面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{z^2}{3}=y$，问 m 为何值时，交线为椭圆？何时为抛物线？

10. 已知单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，试求通过 y 轴且与曲面交线为二平行直

线的平面.

11. 证明用通过坐标轴的平面和椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a>b>c>0)$相截时，有且仅有两条截口曲线是圆，并说明这两个截面的位置.

12. 一动直线沿三条定直线

$l_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}$，　　$l_2:\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$，

$l_3:\frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$

滑动，试求动直线的轨迹方程.

13. 已知一抛物线$\begin{cases}x^2=2z,\\y=0\end{cases}$平行移动，且顶点在抛物线$\begin{cases}y^2=-4z,\\x=0\end{cases}$上，试求其轨迹方程.

14. 试求与直线$\frac{x-p}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$和平面$x+p=0$等距离的点的轨迹方程，并说明曲面名称.

15. 试求与二直线$\begin{cases}y=0,\\z=1\end{cases}$和$\begin{cases}x=0,\\z=-1\end{cases}$相切的球面中心的轨迹方程，并说明是哪种曲面.

16. 设动点与定点$(1,0,0)$的距离等于动点到平面$x=4$的距离的一半，求此动点的轨迹.

17. 已知椭圆抛物面的顶点在原点，对称面为zx面与yz面，且过点$(1,2,6)$和$\left(\frac{1}{3},-1,1\right)$，求这个椭圆抛物面的方程.

18. 适当选取坐标系，求下列轨迹方程：

①到一定点和一定平面（定点不在定平面上）的距离之比是常数的动点轨迹；

②与二给定的异面直线等距离的动点轨迹，已知这两条异面直线的距离为$2c$，夹角为2β(取公垂线为z轴，公垂线段的中点为原点，x轴与二直线成等角).

19. 验证单叶双曲面和双曲抛物面的参数方程可分别写为：

$$\begin{cases}x=a\sec u\cos v,\\y=b\sec u\sin v,\\z=c\tan u\end{cases}\text{与}\begin{cases}x=a(u+v),\\y=b(u-v),\\z=2uv.\end{cases}$$

20. 指出下列曲面的名称：

① $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=1$；　② $\frac{x^2}{4}-y^2-z^2=-1$；

③ $x^2+\frac{y^2}{4}=2z$；　④ $x^2-\frac{y^2}{4}=-2z$；

⑤ $z=2xy$；　⑥ $xy=1$；

⑦ $x^2-y^2=0$；　⑧ $3x^2+4y^2-5z^2=0$.

21. 就 λ 的值讨论下列方程表示哪种曲面：

① $3x^2-4y^2=5z^2+\lambda$；

② $x^2+2y^2+3z^2=\lambda+\frac{1}{4}$；

③ $z^2=\lambda(x^2+y^2)$；

④ $\lambda x^2+y^2=(\lambda-1)z$；

⑤ $\lambda x^2+2x+1+y^2=0$.

22. 就 a,b,c,d 的值讨论下列方程表示哪种曲面：

① $ax^2+by^2+cz^2+d=0,(abc\neq 0)$

② $x^2+y^2=az^2+bz+c$.

23. 给定方程

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,(a>b>c>0)$$

问当 λ 取异于 a^2,b^2,c^2 的各种数值时，它表示怎样的曲面？

24. 设二次曲面族为

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1,\ (a>b>c>0)$$

对于不等于 a^2,b^2,c^2 的每一个 λ 值，它表示一个二次曲面. 试证对空间中任一点 (x_0,y_0,z_0)，$(x_0,y_0,z_0\neq 0)$，恰有上述二次曲面族中的三个曲面通过，而且它们分别是单叶双曲面，双叶双曲面和椭球面.

§14　单叶双曲面和双曲抛物面的直纹性

由一族直线组成的曲面叫**直纹面**，直线族中的每一条直线叫**直母线**（简称**母线**）. 二次柱面和二次锥面都是直纹面. 本节我们将证明单叶双曲面和双曲抛物面也都是直纹面，而且它们和二次柱面与二次锥面不同，过曲面上的每一点

有两条直母线.

1. 单叶双曲面的直纹性

由(13.4)式可知,单叶双曲面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,(a>0,b>0,c>0)$$

移项,分解因式得

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right), \qquad ①$$

于是有如下两个比相等(为了避免分母为零引起的麻烦,把下式看成比而不看成分式):

$$\frac{1+\dfrac{y}{b}}{\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}}=\frac{\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}}{1-\dfrac{y}{b}}\left(=\frac{u}{v}\right).$$

如果比值用 $u:v$ 表示,u,v 是不同时为零的任意两个数,那么我们可以得到如下方程组

$$\begin{cases} u\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=v\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ v\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=u\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{14.1}$$

u,v 是参数.当 u,v 取所有可能的不同时为零的实数时,方程(14.1)表示一族直线.

现在我们来证明:直线族(14.1)是单叶双曲面(13.4)的一个直母线族.

证明分为两步.首先证明直线族(14.1)中每一条直线都在曲面(13.4)上,然后再证曲面(13.4)上的每一点都在直线族(14.1)中的某一条直线上.

要证明直线族(14.1)中的每一条直线都在曲面(13.4)上,只需证明由不同时为零的任意一对实数 u,v 所决定的族(14.1)中的直线上的点都在曲面(13.4)上.

当 u,v 全不为零时,(14.1)中的两个方程左端乘左端,右端乘右端,即得方程①,因而得方程(13.4).这说明,当 u,v 全不为零时,满足方程(14.1)的点也满足方程(13.4).即由全不为零的任一对实数 u,v 所决定的族(14.1)中的直线在曲面(13.4)上.

当 u,v 中有一个为零时,例如 $u=0$,此时必有 $v\neq0$,由这组 u,v 所决定的

族(14.1)中的直线为

$$\begin{cases} 1+\dfrac{y}{b}=0, \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0. \end{cases} \qquad ②$$

易知凡坐标满足②的点,其坐标也满足①,因而也满足(13.4),这说明直线②在曲面(13.4)上. $v=0$ 时情形也是这样.

因此由任意一组不全为零的 u,v 所决定的族(14.1)中的直线都在曲面(13.4)上. 这就证明了族(14.1)中的每一条直线都在曲面(13.4)上.

对于第二步,设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲面(13.4)上任一点,只要证明存在一组不全为零的实数 u_0,v_0,使 P_0 点恰在族(14.1)中由 u_0,v_0 所决定的那条直线上,即有

$$\begin{cases} u_0\left(\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}\right)=v_0\left(1+\dfrac{y_0}{b}\right), \\ v_0\left(\dfrac{x_0}{a}-\dfrac{z_0}{c}\right)=u_0\left(1-\dfrac{y_0}{b}\right). \end{cases} \qquad ③$$

这就说明适合如上条件的 u_0,v_0,必须同时满足

$$u_0 : v_0 = \left(1+\frac{y_0}{b}\right) : \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right) \qquad ④$$

及

$$u_0 : v_0=\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right) : \left(1-\frac{y_0}{b}\right), \qquad ⑤$$

即④⑤两式右端的两个值应相等.

因为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在曲面(13.4)上,有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}-\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

所以有

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right),$$

因而有

$$\left(1+\frac{y_0}{b}\right) : \left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)=\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right) : \left(1-\frac{y_0}{b}\right). \qquad ⑥$$

这就说明如果我们取一组 u_0,v_0,使之满足④式(这样的 u_0,v_0 是存在的,例如取 $u_0=1+\dfrac{y_0}{b}$,$v_0=\dfrac{x_0}{a}+\dfrac{z_0}{c}$ 就是一组),则它们必同时满足⑤式,因而也就满足③式. 这就证明了由这组 u_0,v_0 所决定的族(14.1)中的直线通过点 P_0,即曲面(13.4)上的每一点都在族(14.1)中的某一条直线上.

这样就证明了直线族(14.1)是单叶双曲面(13.4)的一个直母线族,也就是

证明了单叶双曲面是直纹面(如图 14-1).　□

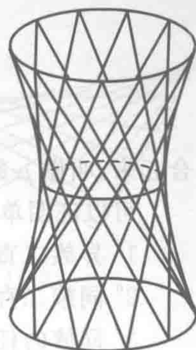


图　14-1

在上述证明的第二步中,我们可以看到对于曲面上的任一点 P_0,决定族(14.1)中通过 P_0 的直线的 u_0 和 v_0,即满足④和⑤的 u_0 及 v_0,不仅是存在的,而且它们的比值 $u_0 : v_0$ 是由 P_0 点(通过④或⑤)唯一决定的,因此,我们得到:

对单叶双曲面(13.4)上的每一点,直母线族(14.1)中有且仅有一条直母线通过该点.

从单叶双曲面(13.4)所化成的①式,我们还可以得到另一个直线族:

$$\begin{cases} u'\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}\right)=v'\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ v'\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=u'\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{14.2}$$

这里 u',v'是参数,不同时为零.同样可以证明直线族(14.2)也是单叶双曲面(13.4)的一个直母线族.过曲面上每一点,直母线族(14.2)中有且仅有一条直母线通过.

注意到直线族(14.1)和(14.2)中的直线只依赖于两个参数的比值 $u : v$ 及 $u' : v'$,因此,为了计算方便,有时也可只用一个参数表示,把(14.1)写成

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{14.3}$$

但必须加上两条直线(分别相当于当参数 $\lambda\to0$ 和 $\lambda\to\infty$时的极限情形)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0, \\ 1-\dfrac{y}{b}=0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0, \\ 1+\dfrac{y}{b}=0. \end{cases} \tag{14.4}$$

(14.3)和(14.4)中的两条直线合起来,我们把它叫做 λ 族直母线,即直母线族(14.1).同样

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\mu\left(1-\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1+\dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \tag{14.5}$$

和
$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=0,\\ 1+\dfrac{y}{b}=0\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=0,\\ 1-\dfrac{y}{b}=0\end{cases} \tag{14.6}$$

合起来,叫做 μ 族直母线,即直母线族(14.2).

可以证明单叶双曲面的直母线具有下列性质:

1° 异族二直母线必共面;

2° 同族二直母线必异面;

3° 同族的任意三条直母线,不平行于同一个平面;

4° 每一条直母线都与腰椭圆相交.

例 1 求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{4}+y^2-\frac{z^2}{9}=1$$

上过点(2,−1,3)的直母线方程.

解 设所求两条直母线的方程分别为

$$\begin{cases}u\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}\right)=v(1+y),\\ v\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\right)=u(1-y)\end{cases}$$

及
$$\begin{cases}u'\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}\right)=v'(1-y),\\ v'\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{3}\right)=u'(1+y).\end{cases}$$

将(2,−1,3)分别代入这两个方程,由第一个求得 $u=0$,由第二个求得 $u'=v'$.再分别代入所设的两个方程中,得

$$\begin{cases}1+y=0,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{3}=0\end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}=1-y,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{3}=1+y,\end{cases}$$

即为所求. □

2. 双曲抛物面的直纹性

由(13.7)式可知,双曲抛物面的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z,(a>0,b>0)$$

仿照上述对于单叶双曲面的讨论，我们同样得到：

双曲抛物面(13.7)有两族直母线(如图14-2). 它们的方程分别是

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\lambda,\\ \lambda\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)=z\end{cases}\tag{14.7}$$

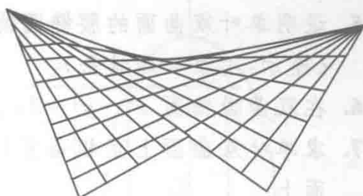


图　14-2

及

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\mu,\\ \mu\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z.\end{cases}\tag{14.8}$$

同样，对于双曲抛物面(13.7)上任一点，直母线族(14.7)与(14.8)中分别各有且仅有一条直母线通过该点.

双曲抛物面的直母线有下列性质：

1° 异族二直母线必相交；

2° 同族二直母线必异面；

3° 同族的所有直母线必平行于同一个平面.

单叶双曲面和双曲抛物面的直纹性，在建筑工程中有很重要的实用价值. 例如，要建造一座旋转单叶双曲面形状的冷却塔，可以用直的钢筋按照它的两族直母线的位置配置起来，从而得到该冷却塔的一个骨架，这种结构既很坚固，施工又很方便. 旋转单叶双曲面形状的冷却塔具有对流快、散热效能好的优点.

习　题　十　四

1. 试求单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$ 上过点(2,3,4)的直母线方程.

2. 在双曲抛物面 $x^2-y^2=2z$ 上，求平行于平面 $x+y+z=0$ 的直母线方程.

3. 对于双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$，证明：

①异族二直母线必相交；

②同族二直母线必异面；

③同族所有直母线必平行于同一个定平面.

4. 求过单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上的点 $(a\cos\theta, b\sin\theta, 0)$ 的两条直母线

方程.

5. 证明单叶双曲面的腰椭圆的任一直径两端的异族二母线必互相平行.
(提示:用第 4 题结果)

6. 在双曲抛物面 $x^2-y^2=2z$ 上,求互相垂直的直母线交点的轨迹.

7. 求单叶双曲面上互相垂直的直母线交点的轨迹,并证明这个轨迹在一个球面上.

8. 试证直线 $\begin{cases}3x+\sqrt{2}y-3\sqrt{2}=0,\\ x+2z-2\sqrt{2}=0\end{cases}$ 在单叶双曲面 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+z^2=1$ 上.

9. 试写出双曲抛物面 $z=xy$ 的两个直母线族的方程.

10. 试求直纹面 $x^2-y^2-z^2=0$ 的直母线族方程.

11. 求与两直线 $\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 与 $\frac{x}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+4}{-2}$ 相交,且与平面 $2x+3y-5=0$ 平行的直线的轨迹.

*12. 求与下列三条直线

$$\begin{cases}x=1,\\ y=z,\end{cases}\quad \begin{cases}x=-1,\\ y=-z,\end{cases}\quad \frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}$$

都相交的直线所构成的曲面.

13. 已知空间二异面直线 l_1 和 l_2,l_1 与 l_2 不垂直,它们的距离为 $2c$,夹角为 2β,分别过 l_1 及 l_2 作两个互相垂直的平面.证明交线的轨迹是一个单叶双曲面.(取公垂线为 z 轴,其中点为原点,x 轴与二直线成等角.)

§15 空间区域简图

在数学分析中,常常会碰到计算由几个曲面围成的空间区域的体积这类问题,这就要求我们能想象出这个空间区域的大致形状,并画出它的简单图形.当围成空间区域的曲面是几个平面和二次曲面时,作出空间区域简图的关键是画出这几个平面和二次曲面相互之间的交线,因此,问题归结为如何画出两个曲面(包括二次曲面和平面)的交线.

由空间曲线的方程可以求出它在两个坐标面上的射影柱面的方程,将这两个射影柱面的方程联立,也是该曲线的方程.因此,画出这两个射影柱面的交线就是这条空间曲线.这样,空间曲线的画法,就转化成两个母线互相垂直的柱面的交线的画法.

例 1 试作二柱面 $x^2+y^2-2x=0$ 与 $x^2+z^2-4=0$ 的相交曲线.

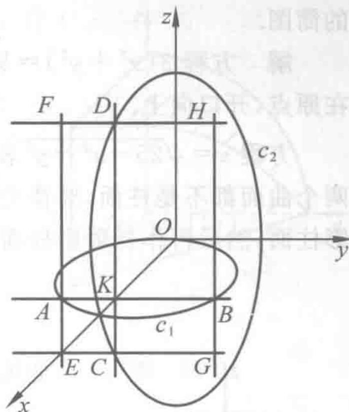
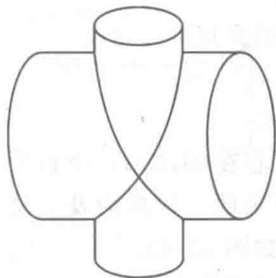


图 15-1

解 画图步骤如下:

1° 画出各柱面在其母线所垂直的坐标面上的截线 c_1, c_2(如图 15-1),它们分别是 xy 面和 zx 面上的圆.

2° 在与两个柱面的母线方向皆不平行的第三个轴(即 x 轴)上取一点 K,过 K 作垂直于 x 轴的平面 $x=K$,与上述二截线交于 A,B,C,D. 具体画法是:过 K 作 y 轴的平行线交圆 c_1 于 A,B;过 K 作 z 轴的平行线交圆 c_2 于 C,D.


图 15-2

3° 过 A,B,C,D 点作各自柱面上的母线(它们都在平面 $x=K$ 上),它们的交点 E,F,G,H 就是二柱面交线上的点.

4° 在 x 轴上取若干不同的点 $K_1,K_2,\cdots$ 就可得到二柱面交线上充分多的点,把它们连接起来,就是二柱面的交线.

5° 如果再画上两个柱面,就得到二柱面的相交图(如图15-2). □

例 2 画出 $x^2+y^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限内的交线图.

解 依上法,

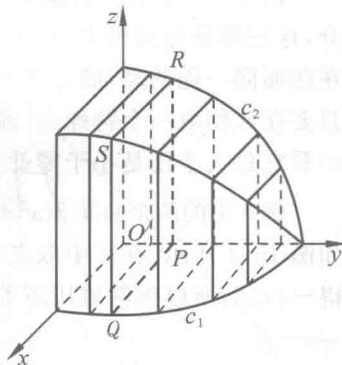


图 15-3

1° 作出二柱面在 xy 面和 yz 面上的截线 c_1, c_2(如图 15-3).

2° 在 y 轴上取点 P,过 P 作 x 轴的平行线交 c_1 于 Q,过 P 作 z 轴的平行线交 c_2 于 R.

3° 过 Q,R 作各自的母线,相交于 S,S 即为二柱面交线上的点.

4° 在 y 轴上取若干点 $P_1,P_2,\cdots$ 即可得所求交线上的很多点,把它们连接起来即得所求交线.

5° 再画上两个柱面就是得到交线图. □

例 3 曲面 $3(x^2+y^2)=16z$ 和 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ 围成一个区域,试作出它

的简图.

解 方程 $3(x^2+y^2)=16z$ 表示一个以 z 轴为旋转轴的旋转抛物面,顶点在原点,开口向上.

方程 $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ 表示上半球面,球心在原点,半径为 5,开口向下. 这两个曲面都不是柱面,要作它们的交线,先要求出该曲线在两个坐标面上的射影柱面,然后再作二射影柱面的交线. 为此,我们先将交线的方程

$$\begin{cases}3(x^2+y^2)=16z,\\ z=\sqrt{25-x^2-y^2}\end{cases}$$

变形,消去 x^2+y^2,得到

$$3(25-z^2)=16z,$$

即

$$(z-3)(3z+25)=0.$$

因为 $z\geqslant 0$,所以 $z=3$. 因此交线的方程可以写成

$$\begin{cases}z=3,\\ x^2+y^2=16.\end{cases}$$

这是一个圆,在平面 $z=3$ 上,圆心在 $(0,0,3)$,半径为 4. 把圆画好后,再加上由它割下来的一块球面及一块抛物面就是所求的空间区域了(如图 15-4). □

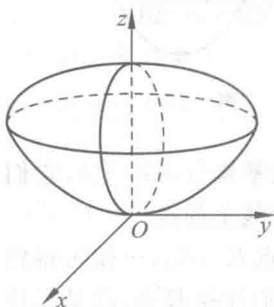


图 15-4

两个曲面方程联立起来,表示它们的交线,而几个不等式联立起来,则表示由相应的曲面所围成的空间区域.

例 4 一个二次曲面 $F(x,y,z)=0$ 和一个平面一样通常把空间分成三部分,这三部分分别用 $F(x,y,z)>0$, $F(x,y,z)=0$ 及 $F(x,y,z)<0$ 来表示. 因为在曲面同一侧的点,满足相同的不等式,因此要判断某一侧用哪个不等号表示,只要在该侧取一个特殊点(通常取原点或坐标轴上的点)将其坐标代入 $F(x,y,z)$ 看它是大于还是小于零就完全决定了.

例 3 中的两个曲面 $3(x^2+y^2)-16z=0$ 和 $z-\sqrt{25-x^2-y^2}=0$ 所围成的区域,如图 15-4 所示. 在其中取点 $(0,0,1)$,代入第一个方程左端得 $-16<0$,第二个得 $-4<0$,所以该区域用不等式组

$$\begin{cases}3(x^2+y^2)-16z\leqslant 0\\ z-\sqrt{25-x^2-y^2}\leqslant 0\end{cases}$$

表示. □

例 5 作出由下列不等式组所确定的区域的简图.

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y\leqslant 1,\ z^2+y^2\leqslant 1.$$

解　$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 表示图形在第一卦限，$x+y\leqslant 1$ 表示该区域在平面 $x+y=1$ 的包含原点的一侧，而 $z^2+y^2\leqslant 1$ 表示圆柱面 $z^2+y^2=1$ 的内部.

圆柱面和平面 $x=0, y=0$ 及 $x+y=1$ 的交线分别是圆、直线和椭圆.平面 $x+y=1$ 和 $y=0$ 及 $z=0$ 的交线都是直线.把五条交线画出来，所围第一卦限的部分就是所求(如图 15-5).　□

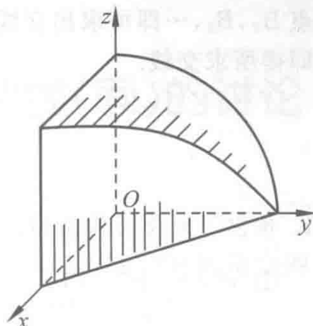


图　15-5

例 6　画出由不等式组 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0, x+y\leqslant 1$ 和 $x^2+y^2-z\geqslant 0$ 所表示的区域简图.

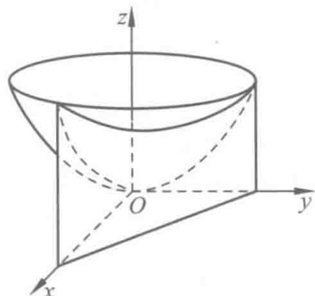


图　15-6

解　$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 表示该区域在第一卦限；$x+y\leqslant 1$ 表示该区域在平面 $x+y=1$ 的包含原点的一侧；$x^2+y^2-z\geqslant 0$ 表示该区域在椭圆抛物面 $x^2+y^2=z$ 的下方.

把椭圆抛物面 $x^2+y^2=z$ 与三个平面 $x=0$，$y=0$，及 $x+y=1$ 的交线画出，围在第一卦限内的部分就是所求空间区域的简图(如图 15-6).　□

下面再介绍平面和柱面的交线的一个画法.

例 7　画出平面 $x+y+z=a(a>0)$ 与圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 在第一卦限内的交线.

解　先画出已知平面和圆柱面与 xy 面的交线 GH 及 $\overset{\frown}{PQ}$(如图 15-7).已知平面和圆柱面与 zx 面的交线 SG 与 MP，且 SG 与 MP 交于 M，于是 M 是所求交线上的点.已知平面和圆柱面交 yz 面于 SH 和 NQ，且 SH 与 NQ 交于 N，于是 N 是所求交线上的点.

然后在 GH 上任取一点 B_1，连接 O 和 B_1 交 $\overset{\frown}{PQ}$ 于 A_1，过 A_1 作 $A_1C_1\parallel z$ 轴交 SB_1 于 C_1，则 C_1 即为所求交线上的点.

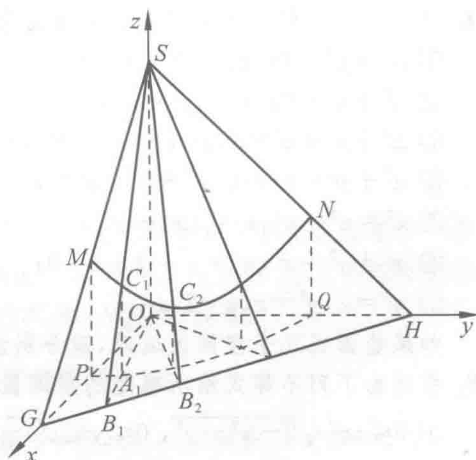


图　15-7

按上述方法在 GH 上取一系列的

点 $B_2, B_3, \cdots$ 即可求出交线上的一系列点 $C_2, C_3, \cdots$ 把它们依次光滑连接起来，即得所求交线. □

习 题 十 五

1. 作出下列曲面的图形：

① $x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{4}=1$；

② $x^2+\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{z^2}{4}=1$；

③ $x^2-\dfrac{y^2}{4}=z$.

2. 作出下列二曲面的交线：

① $x^2+y^2=9$ 和 $y^2+z^2=9$（限制在第一卦限）；

② $x^2+4y=0$ 和 $x^2+z^2=4z$；

③ $x=2z$ 和 $x=y^2+z^2$；

④ $x+y+z=2$ 和 $x^2=y$（限制在第一卦限）.

3. 指明下列不等式的几何意义：

① $x^2+y^2+z^2-r^2\geqslant 0$；

② $x^2+4y^2-3z\leqslant 0$；

③ $x^2-y^2-1\leqslant 0$；

④ $x^2+y^2+z^2-2ax\leqslant 0$.

4. 试用不等式组表达由下列平面或曲面所围成的空间区域，并作简图：

① $x^2+y^2=16, z=x+4, z=0$；

② $x^2+y^2=2z, x^2+y^2=4x, z=0$；

③ $x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2+z^2=4x$；

④ $x^2+y^2-4z=0, x^2+y^2+z^2=12$；

⑤ $z^2=x^2+y^2, z=2(x^2+y^2)$；

⑥ $x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=4x, z=0$；

⑦ $y^2=x, y^2=z, z=2, x=2$.

如果能围成几个空间区域时，请分别注明.

5. 指明由下列不等式组所确定的空间区域，并作出简图：

① $0\leqslant z\leqslant\sqrt{8-x^2-y^2}$, $0\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2}$, $0\leqslant x\leqslant 2$；（单位长1 cm）

② $2-x\leqslant z\leqslant 4-x^2$, $-1\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 2$.（单位长 1 cm）

第四章　坐标变换与一般二次曲线(面)的讨论

在给定的坐标系中，一个图形的方程往往比较复杂，这时需要选取适当的坐标系使图形的方程简化. 为此我们要研究两个坐标系之间的关系.

§16　正交矩阵　矩阵的特征值与特征向量　相似矩阵

本节的目的是为后续的讨论作一点代数上的准备工作，在此我们将讨论 n 阶方阵的一些性质. 事实上本教材只需要 2 阶和 3 阶矩阵，为了便于理解，读者可以把本节中的 n 理解为 2 和 3，但本节所有的结论对一般的 n 都成立. 以下提到的矩阵若无特别说明，都是指实矩阵.

1. 正交矩阵

定义 16.1　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}^{-1}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶**正交矩阵**，这里 $\boldsymbol{A}^T$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，$\boldsymbol{I}$ 表示 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{A}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

定理 16.1　$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是正交矩阵，当且仅当对所有的 $1\leqslant i,j\leqslant n$，$\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\delta_{ij}$. 此处 $\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\0, i\neq j.\end{cases}$

证　由矩阵的乘法和正交矩阵的定义即可.

注　对于 $n=3$，如果把正交矩阵的每一行看成空间某个直角坐标系下一个向量的坐标，则以上定理相当于说，$\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的三个行向量是两两正交的单位向量，也就是它们构成空间的一组正交标架.

例 1　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$是 2 阶正交矩阵.

在空间的某个直角坐标系中，把向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 看成行矩阵，则向量内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 可以写成矩阵乘积 $\boldsymbol{ab}^T$. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶正交矩阵，在空间的某个直角坐标

系中，$a=(a_1,a_2,a_3)$，$b=(b_1,b_2,b_3)$，则向量内积$(aA)\cdot(bA)=(aA)(bA)^T=aAA^Tb^T=ab^T=a\cdot b$. 这说明**与正交矩阵作乘积不改变向量内积**.

由定义 16.1 容易验证正交矩阵有以下性质：

定理 16.2 (1)单位矩阵是正交矩阵；

(2)两个正交矩阵的乘积是正交矩阵；

(3)正交矩阵的逆矩阵是正交矩阵；

(4)若 A 是正交矩阵，则$|A|=\pm1$.

2. 方阵的特征值与特征向量

定义 16.2 设 A 是一个 n 阶方阵，n 阶多项式 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 称为 A 的**特征多项式**，特征多项式的零点(有可能是复数)称为 A 的**特征值**.

例 2 求 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$的特征值.

解 $|\lambda I-A|=\det\begin{pmatrix}\lambda-\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \lambda-\cos\theta\end{pmatrix}=\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1=0$，

解得

$$\lambda=\cos\theta\pm i\sin\theta\quad 或\quad \lambda=e^{\pm i\theta}.$$ □

定理 16.3 矩阵 A 是可逆矩阵当且仅当 0 不是 A 的特征值.

证明留作习题.

定义 16.3 设 A 是一个 n 阶方阵，λ 是 A 的特征值，若有 $1\times n$ 的非零行矩阵 x(这里 x 有可能是复矩阵)满足 $xA=\lambda x$，则称 x 是矩阵 A 的属于特征值 λ 的**特征向量**，简称 x 是 A 的特征向量. 如果 x 是实矩阵，则称为实特征向量.

注 由定义，特征值 λ 的特征向量 x 是齐次方程组 $x(\lambda I-A)=\mathbf{0}$ 的非零解，由于$|\lambda I-A|=0$，由线性方程组解的克莱姆法则知，特征向量 x 一定存在. 反之，若有非零行矩阵 x，满足对某个 λ，有 $xA=\lambda x$，即齐次方程组 $x(\lambda I-A)=\mathbf{0}$ 有非零解，根据克莱姆法则，$|\lambda I-A|=0$. 所以 λ 一定是 A 的特征值. 从而我们有以下等价定义：

定义 16.4 设 A 是一个 n 阶方阵，若对某个 λ，有 $1\times n$ 的非零行矩阵 x(这里 x 有可能是复矩阵)满足 $xA=\lambda x$，则称 λ 是 A 的一个特征值，x 是矩阵 A 的属于 λ 的特征向量.

例 3 求 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$的特征向量.

解 设 $x=(x,y)$是属于 $\lambda=e^{\pm i\theta}$的特征向量，则 $xA=\lambda x$. 如果 $\sin\theta=0$，则

任何 x 都是以上方程的解,此时任何非零向量都是特征向量;如果 $\sin\theta\neq 0$,则解得 $y=\mp \mathrm{i}x$,也就是 $\boldsymbol{x}=(1,\mp\mathrm{i})k, k\in\mathbf{R}-\{0\}$ 是 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta}$ 的特征向量. □

定理 16.4　设 λ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是 λ 的特征向量,若 $k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$,则 $k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y}$ 也是 λ 的特征向量,这里 $k,l\in\mathbf{R}$.

作为练习请读者自己给出证明.

若限制 $n=3$,以上定理说明 λ 的特征向量全体(加上零向量)或者是空间中的一条直线,或是一个平面,或是空间本身.

例 4　求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&2&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

解　由 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$ 可以解出特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$. 设 (x,y,z) 是 λ_1 的特征向量,则 $(x,y,z)\boldsymbol{A}=\lambda_1(x,y,z)$,这个方程组等价于 $x=y=0$,由定理 16.4,λ_1 的所有特征向量是 $k(0,0,1),k\in\mathbf{R}-\{0\}$.

$\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量满足 $(x,y,z)A=2(x,y,z)$,它等价于 $3x+y-3z=0$. 也就是说,对应于特征值 2 的特征向量(添加上零向量后)组成空间中的一个过原点的平面. 通常我们在这个平面上取两个不共线的向量,把该平面上的其他向量用这两个向量的线性组合表示出来. 例如,可以取 $y=0,x=z=1$,即 $(x,y,z)=(1,0,1)$,和 $x=0,y=3,z=1$,即 $(x,y,z)=(0,3,1)$ 两个向量,则 λ_2,λ_3 的所有特征向量可以表示成 $k(1,0,1)+l(0,3,1),k,l\in\mathbf{R}$ 并且 k,l 不同时为 0. □

3. 相似矩阵

定义 16.5　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个 n 阶方阵,若有可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$(这里 $\boldsymbol{T}$ 可以是复矩阵)满足 $\boldsymbol{TAT}^{-1}=\boldsymbol{B}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ **相似**. 若 $\boldsymbol{T}$ 是实矩阵,则称 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 实相似.

定理 16.5　(1)在全体 n 阶方阵的集合上,相似是一个等价关系;

(2)若矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 有相同的特征多项式,从而有相同的特征值.

证明留作习题.

由于相似是一个等价关系,自然可以考虑在这种等价关系之下的分类问题. 这就导致了若当(Jordan)标准型理论,有兴趣的读者可以参考任何一本高等代数教材.

下面我们考察实对称矩阵 .

定理 16.6　任何 n 阶实对称矩阵的特征值是实数. 从而特征向量也是实的.

证 设 A 是实对称矩阵，即 $A^T=A$，λ 是一个特征值，x 是 λ 的一个特征向量. 故有 $xA=\lambda x$，两边取共轭有 $\bar{x}A=\bar{\lambda}\bar{x}$，从而 $\bar{x}Ax^T=\bar{\lambda}\bar{x}x^T$. 另一方面，两边取转置有 $Ax^T=\lambda x^T$，从而 $\bar{x}Ax^T=\lambda\bar{x}x^T$. 故 $\lambda\bar{x}x^T=\bar{\lambda}\bar{x}x^T$，故 $\lambda=\bar{\lambda}$. □

定理 16.7 任何 n 阶对称矩阵正交相似于一个对角形矩阵，即存在实正交矩阵 T，使得 TAT^{-1} 是对角形矩阵.

我们略去本定理的证明，读者可以在任何一本高等代数教材上找到.

下面我们讨论正交矩阵 T 的求法，以后在二次曲面(线)方程的化简中可以看到，这对应于寻找一个直角坐标变换使得二次曲面(线)的方程具有标准形式.

在此重新申明，由于本书只涉及 $n=2,3$ 的情形，因此我们只考虑 $n=3$ 的情况，但是这一节所有的讨论都可以类似推广至一般的 n.

在以下的讨论中我们经常把矩阵的行看成空间某个固定直角坐标系中的向量坐标，因此矩阵的行可以视为空间向量.

由定理 16.7，我们知道存在正交矩阵 T，使得 $TAT^{-1}=B$，其中 $B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$ 是对角形矩阵.

记 T 的三行分别为 t_1,t_2,t_3，则 $TAT^{-1}=B \Leftrightarrow TA=BT \Leftrightarrow t_iA=\lambda_i t_i\,(i=1,2,3)$，即 t_i 是 A 的属于 λ_i 的特征向量. 注意 T 是正交矩阵，因此 t_1,t_2,t_3 还应该是两两正交的单位向量. 这给出了一种计算 T 的方法.

例 5 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. 求正交矩阵 T，使得 TAT^{-1} 是对角阵.

解 先求 A 的特征值. 由 $|\lambda I-A|=0$ 解得 $\lambda_1=1,\lambda_2=3$.

再求 λ_1,λ_2 的特征向量. 解方程组 $(x,y)A=\lambda_1(x,y)$，得 λ_1 的所有特征向量是

$$(x,y)=k(1,-1),\ k\in\mathbf{R}^1-\{0\}.$$

类似地可以求出 λ_2 的所有特征向量是

$$(x,y)=k(1,1),\ k\in\mathbf{R}^1-\{0\}.$$

注意 λ_1 和 λ_2 对应的特征向量已经是正交的，我们只要再找它们的单位特征向量即可. 取 $t_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，$t_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，则

$$T=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}，满足\ TAT^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}.$$ □

例 6　设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. 求正交矩阵 T,使得 TAT^{-1}是对角阵.

解　首先求得 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$.

再求 λ_1,λ_2 的特征向量.解方程组 $(x,y,z)A=\lambda_1(x,y,z)$,得 $x=y+z$,故 λ_1,λ_2 的所有特征向量是

$$(x,y,z)=k(1,1,0)+l(1,0,1),k,l\in\mathbf{R}^1-\{0\}.$$

类似地可以求出 λ_3 的所有特征向量是

$$(x,y,z)=k(-1,1,1),k\in\mathbf{R}^1-\{0\}.$$

注意 λ_1,λ_2 的特征向量和 λ_3 对应的特征向量已经是正交的,我们只要取 λ_1,λ_2 的两个单位正交的特征向量以及 λ_3 的一个单位特征向量即可.取 t_1 为 $(1,1,0)$ 的单位化 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, t_2 应为形如 $k(1,1,0)+l(1,0,1)$ 的单位特征向量,并且使它与 t_1 垂直,得到 $2k+l=0$,也就是 t_2 为形如 $k(-1,1,-2)$ 的单位特征向量,可取 $t_2=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$. 取 $t_3=\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,则

$$T=\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}}\\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}，满足\ TAT^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$ □

在本例中,可以清楚的看到正交矩阵 T 的取法有很多,例如 t_1,t_2 可以取为由向量 $(1,1,0)$ 和 $(1,0,1)$ 张成的平面中任意两个单位正交向量, t_3 也可以与前面的取法相差一个负号.在前面两个例子中我们看到,属于不同特征值的特征向量自动是正交的,这个事实对实对称矩阵的情况都成立(证明留作习题).

习 题 十 六

1. 证明定理 16.2.

2. 证明定理 16.3.

3. 证明定理 16.5.

4. 证明实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量是垂直的.

5. 求以下矩阵的特征值和特征向量：

① $\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 5\end{pmatrix}$； ② $\begin{pmatrix}1 & -1\\4 & 3\end{pmatrix}$； ③ $\begin{pmatrix}2 & 3\\4 & 6\end{pmatrix}$；

④ $\begin{pmatrix}3 & -2\\-2 & 6\end{pmatrix}$； ⑤ $\begin{pmatrix}2 & -3\\-3 & 2\end{pmatrix}$； ⑥ $\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$；

⑦ $\begin{pmatrix}0 & 5 & -5\\-1 & 6 & -3\\-9 & 9 & 4\end{pmatrix}$； ⑧ $\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\-1 & 1 & -2\\-2 & -2 & -7\end{pmatrix}$.

6. 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得以下对称矩阵正交相似于对角形矩阵：

① $\begin{pmatrix}3 & -2\\-2 & 6\end{pmatrix}$； ② $\begin{pmatrix}2 & -3\\-3 & 2\end{pmatrix}$； ③ $\begin{pmatrix}4 & 4\\4 & 4\end{pmatrix}$；

④ $\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\-1 & 1 & -2\\-2 & -2 & -7\end{pmatrix}$； ⑤ $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 5 & -\sqrt{2}\\0 & -\sqrt{2} & 4\end{pmatrix}$； ⑥ $\begin{pmatrix}3 & 2 & 2\\2 & 2 & 0\\2 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

§17 坐标变换

1. 平面坐标变换

假设平面中有两个仿射坐标系Ⅰ$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$和Ⅱ$\{O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'\}$. 点 P 在坐标系Ⅰ中的坐标是(x,y),在Ⅱ中的坐标是(x',y'),即 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{O'P}=x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'$. 我们来考察$(x,y)$和$(x',y')$的关系.

设 O'在Ⅰ中的坐标是(x_0,y_0),向量 $\boldsymbol{e}_1'$,$\boldsymbol{e}_2'$在Ⅰ中的坐标分别是(a_{11},a_{12})和

(a_{21},a_{22})，即

$$\overrightarrow{OO'}=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1'=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2'=a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2.$$

由向量运算的三角形法

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P},$$

故

$$\begin{aligned}x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2&=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'\\&=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+x'(a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2)+y'(a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2)\\&=(a_{11}x'+a_{21}y'+x_0)\boldsymbol{e}_1+(a_{12}x'+a_{22}y'+y_0)\boldsymbol{e}_2.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{21}y'+x_0,\\y=a_{12}x'+a_{22}y'+y_0.\end{cases}\tag{17.1}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$，以上公式写成矩阵的形式就是

$$(x,y)=(x',y')\boldsymbol{A}+(x_0,y_0).$$

以上公式称为平面仿射坐标系Ⅰ到Ⅱ的**点的坐标变换公式**，简称坐标变换公式. 矩阵 A 称为**坐标变换的过渡矩阵**.

下面考察一个向量在不同坐标系下的坐标变化规律. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 在Ⅰ中的坐标是 (x,y)，在Ⅱ中的坐标是 (x',y')，即 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2=x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'$. 把 $\boldsymbol{e}_1'=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2'=a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2$ 带入上式，即得

$$\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{21}y',\\y=a_{12}x'+a_{22}y'.\end{cases}\tag{17.2}$$

写成矩阵形式是

$$(x,y)=(x',y')\boldsymbol{A}.$$

公式(17.2)称为平面仿射坐标系Ⅰ到Ⅱ的**向量的坐标变换公式**.

由于 $\boldsymbol{e}_1'$ 和 $\boldsymbol{e}_2'$ 不平行，因此 $(a_{11},a_{12})\neq k(a_{21},a_{22}),k\in\mathbf{R}$. 这等价于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵. 因此我们有

定理 17.1　平面仿射坐标系之间的坐标变换的**过渡矩阵**是可逆矩阵.

如果坐标系Ⅰ和Ⅱ都是直角坐标系，那么 $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j'=\delta_{ij},i,j=1,2$. 把 $\boldsymbol{e}_1'=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2'=a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2$ 带入上式，即得 $\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\cdot a_{jk}=\delta_{ij},i,j,k=1,2$. 这等价于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵. 特别地，如果Ⅰ和Ⅱ都是右手直角坐标系，那么把它们看成某个空间直角坐标系的 xy 坐标平面，并且 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 分别对应于 x 轴和 y 轴，则在这个坐标系下，$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_1'=(a_{11},a_{12},0),\boldsymbol{e}_2'=$

$(a_{21},a_{22},0)$. 由于 $\boldsymbol{e}_1'\times\boldsymbol{e}_2'=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=(0,0,1)$，得到 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$，因此我们有

定理 17.2 平面直角坐标系之间的坐标变换的过渡矩阵是正交矩阵. 更进一步，如果两个坐标系都是右手系的，则坐标变换的过渡矩阵的行列式为 1.

下面我们进一步讨论右手直角坐标系之间的坐标变换. 几何上看，这样的坐标变换可以分成两部分：坐标轴平移和坐标轴旋转. 见图 17-1 和图 17-2.

平移变换是将两个坐标轴平行移动，使坐标原点从 O 移到 $O'(x_0,y_0)$，得到新坐标系 $O'x'y'$（如图 17-1). 设一点 P 在旧系中的坐标（简称旧坐标）为 (x,y)，在新系中的坐标（简称新坐标）为 (x',y')，这个平移变换的代数表示为

$$\begin{cases}x=x'+x_0,\\ y=y'+y_0.\end{cases}\tag{17.3}$$

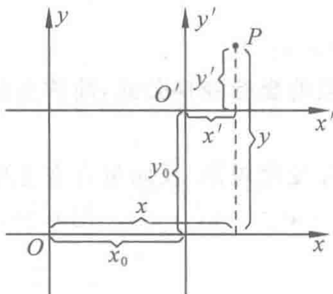


图 17-1

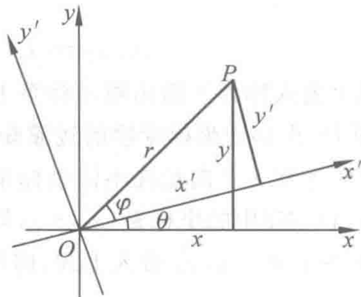


图 17-2

旋转变换是保持原点不动，坐标轴绕原点旋转 θ 角（逆时针方向为正），得到新坐标系 $Ox'y'$（如图 17-2). 设任一点 P 的旧坐标为 (x,y)，新坐标为 (x',y'). 若设 P 点在新系下的极坐标为 $P(r,\varphi)$，则有

$$x'=r\cos\varphi,\quad y'=r\sin\varphi,$$

$$x=r\cos(\varphi+\theta)=r\cos\varphi\cos\theta-r\sin\varphi\sin\theta,$$

$$y=r\sin(\varphi+\theta)=r\cos\varphi\sin\theta+r\sin\varphi\cos\theta,$$

于是得到旋转角为 θ 的旋转变换的代数表示为

$$\begin{cases}x=x'\cos\theta-y'\sin\theta,\\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta.\end{cases}\tag{17.4}$$

任意两个直角坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$，已知 O' 在 Oxy 中的坐标为 (x_0,y_0)，x 轴到 x' 轴的旋转角为 θ，求这两个坐标系之间的坐标变换公式.

作一个辅助坐标系 $O'\bar{x}\,\bar{y}$，使 $\bar{x}$ 轴平行于 x 轴，如图 17-3. 由(17.3)有

$$\begin{cases} x=\bar{x}+x_0, \\ y=\bar{y}+y_0. \end{cases} \quad ①$$

由(17.4)有

$$\begin{cases} \bar{x}=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ \bar{y}=x'\sin\theta+y'\cos\theta. \end{cases} \quad ②$$

将②代入①得

$$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta+x_0, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta+y_0. \end{cases} \quad (17.5)$$

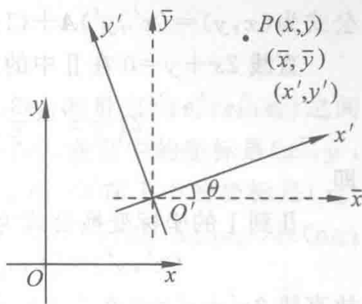


图　17-3

这就是一般坐标变换公式.

例 1　将坐标轴旋转$\frac{\pi}{4}$,求曲线 $xy=1$ 在新坐标系中的方程.

解　$\theta=\frac{\pi}{4}$时,旋转变换公式(17.4)为

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'. \end{cases}$$

代入 $xy=1$,得到

$$\frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{2}=1.$$

□

例 2　在平面上,设坐标系Ⅱ的 x' 轴 y' 轴在坐标系Ⅰ中的方程是 $3x-4y+5=0$, $4x+3y-10=0$,并且Ⅰ和Ⅱ都是右手直角坐标系.求:

(1)Ⅰ到Ⅱ的坐标变换公式;

(2)直线 $2x+y=0$ 在Ⅱ中的方程;

(3)直线 $2x'+y'=0$ 在Ⅰ中的方程.

解　设Ⅰ$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$,Ⅱ$\{O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'\}$. O'的坐标为$\begin{cases} 3x-4y+5=0, \\ 4x+3y-10=0, \end{cases}$即$\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$ x'轴 y' 轴的方向向量分别为$\pm(4,3)$和$\pm(-3,4)$.于是$\boldsymbol{e}_1'$在Ⅰ中的坐标可以取为$\pm\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$,$\boldsymbol{e}_2'$的坐标可以取为$\pm\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$.考虑到都是右手系,故坐标变换的过渡矩阵的行列式为1,故$\boldsymbol{A}=\pm\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.所以Ⅰ到Ⅱ的坐标变换

公式为$(x,y)=(x',y')\boldsymbol{A}+(1,2)$.

直线 $2x+y=0$ 在Ⅱ中的方程为

$$2\left(\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'+1\right)+\left(\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'+2\right)=0,$$

即

$$11x'-2y'+20=0.$$

Ⅱ到Ⅰ的坐标变换公式为

$$(x',y')=[(x,y)-(1,2)]\boldsymbol{A}^{-1}=(x-1,y-2)\boldsymbol{A}^{T}.$$

故直线 $2x'+y'=0$ 在Ⅰ中的方程是

$$2\left[\frac{4}{5}(x-1)+\frac{3}{5}(y-2)\right]+\left[-\frac{3}{5}(x-1)+\frac{4}{5}(y-2)\right]=0,$$

即

$$x+2y-5=0.$$

例 3 在右手直角坐标系Ⅰ中,设抛物线的对称轴是 $x-y-2=0$,顶点是$(4,2)$,焦点是$(2,0)$,求其方程.

解 作右手系直角坐标变换,使得新坐标系Ⅱ的原点在$(4,2)$,x'轴与$x-y-2=0$ 重合. 故 x'轴的方向向量为$(1,1)$,取Ⅱ的基向量为 $\boldsymbol{e}_1'=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$\boldsymbol{e}_2'=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,从而Ⅰ到Ⅱ的坐标变换公式是

$$(x,y)=(x',y')\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+(4,2).$$

在Ⅱ中焦点坐标(x',y')满足

$$(2,0)=(x',y')\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}+(4,2),$$

解得

$$(x',y')=(-2\sqrt{2},0).$$

所以在Ⅱ中抛物线的标准方程是

$$y'^2=-2px'=-8\sqrt{2}x'.$$

利用坐标变换公式可以计算出在Ⅰ中抛物线的方程是

$$x^2-2xy+y^2+12x+20y-92=0.$$ □

2. 空间坐标变换

现在考虑空间中两个仿射坐标系Ⅰ$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$和Ⅱ$\{O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$之间的坐标变换.设点 P 在坐标系Ⅰ中的坐标是(x,y,z),在Ⅱ中的坐标是(x',y',z'),即 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2+z\boldsymbol{e}_3$,$\overrightarrow{O'P}=x'\boldsymbol{e}_1'+y'\boldsymbol{e}_2'+z'\boldsymbol{e}_3'$. O'在Ⅰ中的坐标是(x_0,y_0,z_0),向量 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$在Ⅰ中的坐标分别是$(a_{11},a_{12},a_{13})$,$(a_{21},a_{22},a_{23})$和$(a_{31},a_{32},a_{33})$,即

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OO'}&=x_0\boldsymbol{e}_1+y_0\boldsymbol{e}_2+z_0\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}_1'&=a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{12}\boldsymbol{e}_2+a_{13}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}_2'&=a_{21}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+a_{23}\boldsymbol{e}_3,\\ \boldsymbol{e}_3'&=a_{31}\boldsymbol{e}_1+a_{32}\boldsymbol{e}_2+a_{33}\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

完全类似于平面坐标变换的情形,可以计算出

$$\begin{cases}x=a_{11}x'+a_{21}y'+a_{31}z'+x_0,\\ y=a_{12}x'+a_{22}y'+a_{32}z'+y_0,\\ z=a_{13}x'+a_{23}y'+a_{33}z'+z_0.\end{cases}\tag{17.6}$$

记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$,以上公式写成矩阵的形式就是

$$(x,y,z)=(x',y',z')\boldsymbol{A}+(x_0,y_0,z_0).$$

这个公式称为空间仿射坐标系Ⅰ到Ⅱ的**点的坐标变换公式**,简称坐标变换公式.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为坐标系Ⅰ到Ⅱ的坐标变换的过渡矩阵.注意Ⅰ到Ⅱ的坐标变换的**过渡矩阵的三行恰好是Ⅱ的基向量在Ⅰ中的坐标**.

类似地,**向量的坐标变换公式**是

$$(x,y,z)=(x',y',z')\boldsymbol{A}.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'$不共面,因此混和积$(\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3')\neq 0$. 这等价于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.因此我们有

定理 17.3　空间仿射坐标系之间的坐标变换的过渡矩阵是可逆矩阵.

如果坐标系Ⅰ和Ⅱ都是直角坐标系,那么

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_j'=\delta_{ij},i,j=1,2,3.$$

把 $\boldsymbol{e}_i'=a_{i1}\boldsymbol{e}_1+a_{i2}\boldsymbol{e}_2+a_{i3}\boldsymbol{e}_3$ 带入上式,即得

$$\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\cdot a_{jk}=\delta_{ij},i,j,k=1,2,3.$$

这等价于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵.特别地,如果Ⅰ和Ⅱ都是右手系直角坐标系,那么

混和积$(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=(\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3')=1$，从而 $\det(a_{ij})=1$. 因此我们有

定理 17.4 空间直角坐标系之间的坐标变换的过渡矩阵是正交矩阵. 更进一步，如果两个坐标系都是右手系的，则坐标变换的过渡矩阵的行列式为 1.

例 4 利用右手直角坐标变换把平面

$$\Pi: ax+by+cz+d=0\,(a^2+b^2+c^2\neq 0)$$

化成 $z'=0$.

解 平面 $ax+by+cz+d=0$ 的单位法向量是$\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$. 由于平面 $ax+by+cz+d=0$ 在新坐标系$\{O',\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3'\}$下化成坐标平面 $z'=0$，故应设 $\boldsymbol{e}_3'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$. 由于我们考虑的是右手直角坐标变换，其过渡矩阵是正交矩阵，每一行组成的向量都是单位向量并且两两正交，故 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'$是与 $\boldsymbol{e}_3'$正交的单位向量. 与 $\boldsymbol{e}_3'$正交的平面满足 $ax+by+cz=0$，不妨设 $a\neq 0$，则向量$\left(-\dfrac{b}{a},1,0\right)$在这个平面上，可以取其单位化为 $\boldsymbol{e}_2'$，即 $\boldsymbol{e}_2'=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-b,a,0)$.

取 $\boldsymbol{e}_1'=\boldsymbol{e}_2'\times\boldsymbol{e}_3'=\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)}}(ac,bc,-a^2-b^2)$. 最后，把新坐标原点 O'取在平面 Π 上即可$\left(\text{例如取 } O' \text{ 为}\left(-\dfrac{d}{a},0,0\right)\right)$. □

例 5 证明在右手直角坐标系中方程 $f(2x+y-2z,x-2y)=0$ 表示一个柱面，求出这个柱面的母线方向和一条准线方程.

解 如果能选择合适的直角坐标系，使得方程 $f(2x+y-2z,x-2y)=0$ 表示的图形不含某个坐标，则它就表示柱面. 因此考虑坐标变换 $x'=k(2x+y-2z)$，$y'=l(x-2y)$，其中 k,l 都是待定常数. 如果这是一个直角坐标变换，则原方程变成 $f\left(\dfrac{x'}{k},\dfrac{y'}{l}\right)=0$，它表示一个柱面. 由于直角坐标变换的过渡矩阵是正交矩阵，因此可以取 $k=\dfrac{1}{3}$，$l=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，即新坐标系的基向量 $\boldsymbol{e}_1'=\dfrac{1}{3}(2,1,-2)$，$\boldsymbol{e}_2'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,-2,0)$，容易验证 $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'$单位正交，取 $\boldsymbol{e}_3'=\boldsymbol{e}_1'\times\boldsymbol{e}_2'=-\dfrac{1}{3\sqrt{5}}(4,2,5)$，从而得到直角坐标变换

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{3}(2x+y-2z), \\ y'=\frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y), \\ z'=-\frac{1}{3\sqrt{5}}(4x+2y+5z). \end{cases}$$

图形在新直角坐标系下方程是 $f(3x',\sqrt{5}y')=0$，它表示一个柱面. 其母线平行于 e_3'，故母线方向可以取为 $(4,2,5)$. 在新直角坐标系下准线可以取为 $\begin{cases} f(3x',\sqrt{5}y')=0, \\ z'=0. \end{cases}$ 该准线在原直角坐标系下方程是

$$\begin{cases} f(2x+y-2z,x-2y)=0, \\ 4x+2y+5z=0. \end{cases}$$

□

习 题 十 七

1. 将坐标系旋转 $\frac{\pi}{3}$，求点 $M(1,2)$ 在新坐标系中的坐标.
2. 将原点移动到 $\left(\frac{1}{4},1\right)$，求曲线 $y^2=2y+4x$ 在平移后的新坐标系中的方程.
3. 求平移变换的新原点 (x_0,y_0)，使曲线 $9x^2+25y^2+18x-50y-191=0$ 在新坐标系中的方程不含一次项.
4. 已知两条互相垂直的直线

$$l_1:3x-4y+6=0;\quad l_2:4x+3y-17=0.$$

以它们为新坐标轴(l_1 为 x' 轴，l_2 为 y' 轴，且都以向上的方向为正向)，求坐标变换公式，且求点 $A(0,1)$ 的新坐标.

5. 求以两条互相垂直的直线

$$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0,\quad l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$$

为新坐标轴(l_1 为 x' 轴，l_2 为 y' 轴，且以向上的方向为正向)的坐标变换公式.

6. 利用坐标变换，将 $Ax+By+C=0$ 变成 $y'=0$.
7. 设 x' 轴和 y' 轴在原直角坐标系中的方程为：

$$12x-5y-2=0 \text{ 和 } 5x+12y-29=0.$$

写出点的坐标变换公式. 并且求点 $A(-2,0)$ 的新坐标. 设某椭圆的长轴、短

轴分别在 x' 轴、y' 轴上，其长、短半轴的长度分别为 3，2，求这个椭圆在原坐标系中的方程.

8. 设新旧坐标系都是右手直角坐标系，坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'+5, \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-3. \end{cases}$$

求新坐标系的原点在旧坐标系中的坐标，并求坐标轴的旋转角 θ.

9. 已知一抛物线的准线 l 的方程为 $x-y+2=0$，焦点为 $F(2,0)$，求抛物线的方程.

10. 在平移变换下，一点的旧坐标为(2，3，1)，而新坐标为(0，1，2)，试求平移变换公式.

11. 以 (a,b,c) 为新原点作平移，求下列方程在新系下的方程：

①$ax+by+cz=a^2+b^2+c^2$；

②$\dfrac{x-a}{l}=\dfrac{y-b}{m}=\dfrac{z-c}{n}$；

③$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$.

12. 分别写出空间中绕 x 轴及 y 轴旋转的变换公式.

13. 试将方程 $2x+3y+4z+5=0$ 用适当的坐标变换变成 $z'=0$.

14. 由一个直角坐标系到另一个有同一原点的直角坐标系的变换可以分为三步来实现.

$$\text{Ⅰ}\quad \begin{cases} x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta, \\ y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta, \quad (-\pi<\theta\leqslant\pi) \\ z = z_1; \end{cases}$$

$$\text{Ⅱ}\quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2\cos\varphi - z_2\sin\varphi, \quad (0<\varphi<\pi) \\ z_1 = y_2\sin\varphi + z_2\cos\varphi; \end{cases}$$

$$\text{Ⅲ}\quad \begin{cases} x_2 = x'\cos\psi - y'\sin\psi, \\ y_2 = x'\sin\psi + y'\cos\psi, \quad (-\pi<\psi\leqslant\pi) \\ z_2 = z'. \end{cases}$$

15. 在右手直角坐标系Ⅰ中，已知三个互相垂直的平面 $\Pi_1: x+y+z-1=0$，$\Pi_2: x-z+1=0$，$\Pi_3: x-2y+z+2=0$. 确定新坐标系Ⅱ使得 Π_1，Π_2，Π_3 分别是 $y'O'z'$，$z'O'x'$，$x'O'y'$ 坐标面，并且Ⅰ的原点 O 在Ⅱ的第一卦限内.

16. 证明二次锥面 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz=0$ 有三条互相垂直的直母线的充要条件是 $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$.

§18　一般二次曲线与二次曲面方程的化简

本节中涉及的所有坐标系均是右手直角坐标系，坐标变换是右手直角坐标变换.

1. 一般二次曲线方程的化简

中学中讨论过椭圆、双曲线和抛物线的标准方程.那么如果给定一般二次方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0\ (a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0) \tag{18.1}$$

它代表何种曲线呢？我们的基本想法是先利用坐标变换（旋转）消去交叉项 xy，再利用配方（平移）消去一次项从而得到一个标准方程.

第一步，若 $a_{12}\neq 0$，进行旋转变换(17.4)，则(18.1)在新系中的方程变为

$$a_{11}'x'^2+2a_{12}'x'y'+a_{22}'y'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c'=0, \qquad ①$$

其中 $x'y'$ 项的系数为

$$\begin{aligned}2a_{12}'&=2(a_{22}-a_{11})\sin\theta\cos\theta+2a_{12}(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\&=(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta+2a_{12}\cos 2\theta.\end{aligned}$$

为使在新系下的方程①中不出现乘积项 $x'y'$，只需使旋转角 θ 适合

$$(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta+2a_{12}\cos 2\theta=0,$$

即

$$\cot 2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}. \tag{18.2}$$

因为余切可以取任意实数，所以这样的 θ 总存在.

通过由满足(18.2)的 θ 角所决定的旋转变换，方程(18.1)变为

$$a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c'=0. \tag{18.3}$$

第二步，再用平移变换对(18.3)进行化简.分两种情况：

(一) a_{11}'与 a_{22}' 皆不为零，即 $a_{11}'a_{22}'\neq 0$.

将(18.3)配方得

$$a_{11}'\left(x'+\frac{b_1'}{a_{11}'}\right)^2+a_{22}'\left(y'+\frac{b_2'}{a_{22}'}\right)^2+c'-\frac{b_1'^2}{a_{11}'}-\frac{b_2'^2}{a_{22}'}=0. \qquad ②$$

作平移
$$\begin{cases} x'=\bar{x}-\dfrac{b_1'}{a_{11}'}, \\ y'=\bar{y}-\dfrac{b_2'}{a_{22}'}. \end{cases}$$

②变成
$$a_{11}'\bar{x}^2+a_{22}'\bar{y}^2+u_0=0, \tag{18.4}$$

此处
$$u_0=c'-\frac{b_1'^2}{a_{11}'}-\frac{b_2'^2}{a_{22}'}. \tag{18.5}$$

又分下列五种情形：

1° $a_{11}'a_{22}'>0, u_0\neq 0, a_{11}'u_0<0$ 时，(18.4)表示椭圆.

2° $a_{11}'a_{22}'>0, u_0\neq 0, a_{11}'u_0>0$ 时，(18.4)无实轨迹，表示虚椭圆.

3° $a_{11}'a_{22}'>0, u_0=0$ 时，(18.4)表示一点(或一对共轭虚直线).

4° $a_{11}'a_{22}'<0, u_0\neq 0$ 时，(18.4)表示双曲线.

5° $a_{11}'a_{22}'<0, u_0=0$ 时，(18.4)表示二相交直线.

(二) a_{11}' 与 a_{22}' 中有一个为零，即 $a_{11}'a_{22}'=0$，不妨设 $a_{11}'=0$. 将方程(18.3)配方得
$$a_{22}'\left(y'+\frac{b_2'}{a_{22}'}\right)^2+2b_1'x'+c'-\frac{b_2'^2}{a_{22}'}=0. \tag{③}$$

如 $b_1'\neq 0$，③经过平移
$$\begin{cases} x'=\bar{x}-\dfrac{1}{2b_1'}\left(c'-\dfrac{b_2'^2}{a_{22}'}\right), \\ y'=\bar{y}-\dfrac{b_2'}{a_{22}'} \end{cases}$$

变成
$$a_{22}'\bar{y}^2+2b_1'\bar{x}=0, \tag{18.6}$$

(18.6)表示抛物线. 于是有

6° $a_{11}'a_{22}'=0, a_{11}'=0, b_1'\neq 0$ 时，(18.6)表示抛物线.

如 $b_1'=0$，③经过平移 $\begin{cases} x'=\bar{x}, \\ y'=\bar{y}-\dfrac{b_2'}{a_{22}'}, \end{cases}$ 变成
$$a_{22}'\bar{y}^2+\bar{c}=0, \tag{18.7}$$

此处
$$\bar{c}=\frac{1}{a_{22}'}(a_{22}'c'-b_2'^2).$$

7° $a_{11}'a_{22}'=0, a_{11}'=0, b_1'=0, a_{22}'\bar{c}<0$ 时，(18.7)表示一对平行直线.

8° $a_{11}'a_{22}'=0, a_{11}'=0, b_1'=0, a_{22}'\bar{c}>0$ 时，(18.7)表示一对虚平行直线.

9° $a_{11}'a_{22}'=0, a_{11}'=0, b_1'=0, \bar{c}=0$ 时，(18.7)表示一对重合直线.

于是我们得到如下结论:任意一条二次曲线,必属于上述九类中的某一类.

例 1　化简下列方程并作出图形.

$$5x^2+4xy+2y^2-24x-12y+18=0.$$

解　由 $\cot 2\theta=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}=\frac{3}{4}$,得

$$\cot 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}=\frac{3}{4},$$

即
$$2\tan^2\theta+3\tan\theta-2=0,$$

解得 $\tan\theta=\frac{1}{2}$ 或 -2.

取 $\tan\theta=\frac{1}{2}$,由图 18-1,有

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

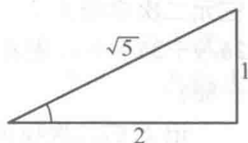


图　18-1

得旋转变换

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{5}}(2x'-y'), \\ y=\frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y'). \end{cases}$$

代入原方程,整理得

$$6x'^2+y'^2-12\sqrt{5}x'+18=0.$$

配方化为
$$6(x'-\sqrt{5})^2+y'^2-12=0,$$

作平移
$$\begin{cases} x'=x''+\sqrt{5}, \\ y'=y'', \end{cases}$$

得
$$6x''^2+y''^2-12=0, \qquad ④$$

表示椭圆.

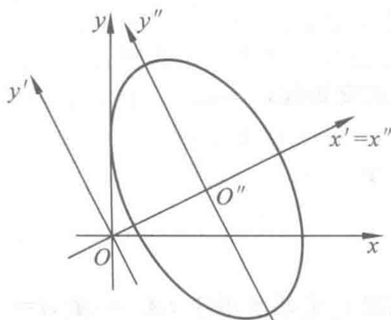


图　18-2

作图步骤:(1)将坐标系 Oxy 旋转 $\theta(\tan\theta=\frac{1}{2})$,得 $Ox'y'$;(2)$Ox'y'$ 平移到 $O''x''y''$,$O''(\sqrt{5},0)$;(3)将方程④化成标准形 $\frac{x''^2}{2}+\frac{y''^2}{12}=1$,在坐标系 $O''x''y''$ 中作出它的图形(如图 18-2).　□

2. 一般二次曲面方程的化简

以上用坐标轴的旋转消去交叉项的方法只适合于二次曲线方程的化简，对于二次曲面方程，我们采用特征值与特征向量的方法处理，需要指出的是这种方法更加具有一般性，它也可以化简二次曲线或者高维空间中的二次曲面方程.

我们在第 13 节总结过 17 种二次曲面（包括退化情形）的标准方程，假设有三元二次多项式 $F=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c$，现在问：一般的三元二次方程 $F=0$ 是否代表以上的曲面之一呢？

记 F 的二次项部分为 $\Phi=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$. 引入两个对称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

分别称为 F 的矩阵和 F 的二次项矩阵

F 和 Φ 可以重新写成矩阵形式

$$F=(x,y,z,1)\boldsymbol{A}(x,y,z,1)^T,$$
$$\Phi=(x,y,z)\boldsymbol{A}_0(x,y,z)^T.$$

在直角坐标变换 $(x,y,z)=(x',y',z')\boldsymbol{T}$ 下，新坐标系中二次项部分 $\Phi=(x,y,z)\boldsymbol{A}_0(x,y,z)^T=(x',y',z')\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}^T(x',y',z')^T$，即新坐标系中二次项矩阵是 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}^T$. 如果我们希望它不含交叉项 $x'y'$，$x'z'$ 及 $y'z'$，这等价于矩阵 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}^T$ 是对角阵，即 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}^T=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

我们来讨论过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的求法．由于 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵，

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\boldsymbol{T},$$

用 $\boldsymbol{t}_i(i=1,2,3)$ 表示 $\boldsymbol{T}$ 的第 i 行，即 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{t}_3 \end{pmatrix}$，则以上关系等价于 $\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{A}_0=\lambda_i\boldsymbol{t}_i$，$i=$

1,2,3. 这说明 λ_i 恰好是 $\boldsymbol{A}_0$ 的特征值,而 $\boldsymbol{t}_i$ 是属于 λ_i 的特征向量. 定理16.7保证了过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的存在性.

以上的讨论事实上给出了坐标变换的过渡矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的求法,即先计算 $\boldsymbol{A}_0$ 的特征值,然后求这些特征值的三个单位正交特征向量,以它们作为 $\boldsymbol{T}$ 的三行,并注意使 $\boldsymbol{T}$ 的行列式为1即可.

假设坐标变换 $(x,y,z)=(x',y',z')\boldsymbol{T}$,使得在新坐标系中 F 的二次项部分不含交叉项 $x'y',x'z',y'z'$. 设二次曲面在新坐标系下的方程是

$$F=\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+\lambda_3 z'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+2b_3'z'+c'=0, \qquad (*)$$

其中 λ_i 是 $\boldsymbol{A}_0$ 的特征值. 类似于曲线的情形,我们分几种情况讨论曲面的形状:

(1)$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 均不为0. 这时通过配方(坐标平移)可以把(*)式化为 $\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+\lambda_3 z''^2+c''=0$. 此时又分为两种情况:

1° $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 同号. 根据 c'' 与 λ_i 符号的异同或 $c''=0$ 分别表示椭球面、虚椭球面或一个点.

2° $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 不同号. 根据 c'' 与 λ_i 的符号或 $c''=0$ 分别表示单叶双曲面、双叶双曲面或二次锥面.

(2)$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 有一个为0,不妨设 $\lambda_3=0$. 这时通过配方(坐标平移)可以把(*)式化为 $\lambda_1 x''^2+\lambda_2 y''^2+2b_3''z''+c''=0$. 此时又分为两种情况:

1° λ_1,λ_2 同号. 如果 $b_3''\neq 0$,则是椭圆抛物面;如果 $b_3''=0,c''\neq 0$,根据 c'' 与 λ_1,λ_2 符号的异同分别表示椭圆柱面或虚椭圆柱面;如果 $b_3''=0,c''=0$,则是一条直线.

2° λ_1,λ_2 不同号. 如果 $b_3''\neq 0$,则是双曲抛物面;如果 $b_3''=0,c''\neq 0$,则是双曲柱面;如果 $b_3''=0,c''=0$,则是两张相交平面.

(3)$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 有两个为0,不妨设 $\lambda_1=\lambda_2=0$. 这时通过配方(坐标平移)可以把(*)式化为 $\lambda_3 z''^2+2b_1''x''+2b_2''y''+c''=0$.

如果 b_1'',b_2'' 不全为0,则是抛物柱面(如果 b_1'',b_2'' 全不为0,还需一个 $x''y''$ 平面上的坐标旋转才能化为标准方程);如果 $b_1''=b_2''=0,c''\neq 0$,根据 c'' 与 λ_3 符号的异同分别表示两张平行平面或两张虚平行平面;如果 $b_1''=b_2''=c''=0$,则是两张重合平面.

综合以上讨论我们得到:任何一个三元二次方程都可以通过坐标变换化为第13节中的17种二次曲面的标准方程之一.

例2　确定二次曲面 $2xy+2xz-2yz-8y-4z+1=0$ 的类型并画简图.

解　二次项矩阵 $\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$. 特征值满足 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0|=0$,解得 $\lambda_1=$

$\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

λ_1,λ_2 的特征向量满足方程$(x,y,z)(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)=0$,它等价于 $x=y+z$,其通解是$(x,y,z)=k(1,1,0)+l(1,0,1),k,l\in\mathbf{R}$.类似地,$\lambda_3$ 的特征向量满足方程$(x,y,z)(\lambda_3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)=0$,它等价于 $x=-y=-z$,其通解是$(x,y,z)=k(-1,1,1),k\in\mathbf{R}$.在 λ_1,λ_2 的特征向量中取两个单位正交者:取 $\boldsymbol{t}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$,利用 $\boldsymbol{t}_2=k(1,1,0)+l(1,0,1)$,并且 $\boldsymbol{t}_1\cdot\boldsymbol{t}_2=0$ 以及 $\boldsymbol{t}_2$ 是单位向量,可以取 $\boldsymbol{t}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,-2)$.在 λ_3 的特征向量中取单位向量 $\boldsymbol{t}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$.记 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_1\\ \boldsymbol{t}_2\\ \boldsymbol{t}_3\end{pmatrix}$,容易验证 $\det\boldsymbol{T}=1$,因此坐标变换$(x,y,z)=(x',y',z')\boldsymbol{T}$ 是右手直角坐标变换.在新坐标系中,原二次曲面的方程化为 $x'^2+y'^2-2z'^2-4\sqrt{2}x'-4\sqrt{3}z'+1=0$,或配方为$(x'-2\sqrt{2})^2+y'^2-2(z'+\sqrt{3})^2-1=0$.作平移$\begin{cases}x''=x'-2\sqrt{2},\\ y''=y',\\ z''=z'+\sqrt{3},\end{cases}$ 方程变成 $x''^2+y''^2-2z''^2=1$,这是一个单叶双曲面.最终的坐标变换为

$$(x,y,z)=(x''+2\sqrt{2},y'',z''-\sqrt{3})\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt{2}}x''-\frac{1}{\sqrt{6}}y''-\frac{1}{\sqrt{3}}z''+3\\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}x''+\frac{1}{\sqrt{6}}y''+\frac{1}{\sqrt{3}}z''+1.\\ z=-\frac{2}{\sqrt{6}}y''+\frac{1}{\sqrt{3}}z''-1\end{cases}$$

新坐标系原点在 $O'(3,1,-1)$,x''轴,y''轴,z''轴的单位方向向量分别是 T 的三行,即$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$,$\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$和$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.图 18-3 是一个简图.

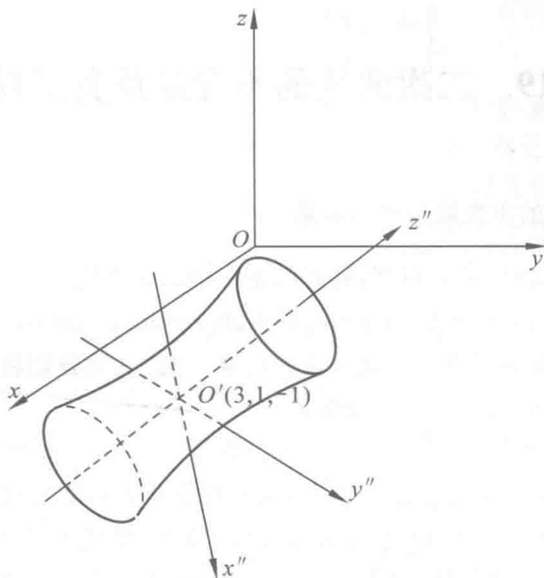


图　18-3

□

习　题　十　八

1. 将坐标系旋转$\frac{\pi}{6}$,求$\sqrt{3}xy-y^2=12$在新坐标系中的方程,并画简图.

2. 化简下列方程并画图:

①$3x^2-4xy+6y^2-8x-4y+3=0$;

②$4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$;

③$9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$.

3. 利用坐标变换讨论分式线性函数$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$的图形,其中$ad-bc\neq 0$.

4. 设二次曲线$(A_1x+B_1y+C_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2)^2=1$满足$A_1B_2-A_2B_1<0$,$A_1A_2+B_1B_2=0$.利用坐标变换把它化成标准形式,并指出这是什么曲线.

5. 化简$x^2+y^2-4z^2-4x-2y-4z-3=0$,指出是何种曲面.

6. 利用坐标变换消去方程$z=x^2+xy+y^2$的交叉项xy,指出是何种曲面.

7. 利用坐标变换使方程$x^2=y+z$中减少一个一次项,化成标准方程,指出是何种曲面.

8. 确定二次曲面$x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz-8=0$的类型并画简图.

§19 二次曲线的不变量及类型判别

1. 二次曲线的不变量和半不变量

从上一节的讨论，我们得到：任意给定一个二元二次方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0, \tag{19.1}$$

它所表示的二次曲线必属于九类曲线中的某一类. 如果我们将方程(19.1)经过任意一个直角坐标变换(17.4)，变成

$$a_{11}'x^{2'}+2a_{12}'x'y'+a_{22}'y'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c'=0, \tag{19.2}$$

再对(19.2)应用上节的方法进行化简，就可知它所表示的曲线是九类中的某一类. 现在我们问：由(19.1)得到的结果与由(19.2)得到的结果是否一定相同? 答案应该是肯定的. 这是因为(19.2)是(19.1)经过坐标变换得到的. 而坐标变换只是改变了坐标系的位置，曲线本身并未改变，因此(19.1)与(19.2)应表示同一条曲线. 但另一方面，由于坐标系改变了，方程的系数确实要跟着改变，而方程所表示的曲线类型又是由方程系数决定的，因此我们猜想方程(19.1)和(19.2)的系数间应有某些共同的东西，即有某些由系数所决定的量，是不随坐标系改变的，而正是由这些量决定了曲线的类型. 这个猜想是对的，这就是本节所要讨论的不变量.

定义 19.1 已知二次曲线方程

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0,$$

经过一般直角坐标变换(17.5)变为

$$F'(x',y')=a_{11}'x'^2+2a_{12}'x'y'+a_{22}'y'^2+2b_1'x'+2b_2'y'+c'=0.$$

由 $F(x,y)$ 的系数所组成的一个函数 f，如果和由 $F'(x',y')$ 的对应的系数所组成的相同的函数的值总是相等的，即无论直角坐标变换(17.5)怎样选择，总有

$$f(a_{11},a_{12},a_{22},b_1,b_2,c)=f(a_{11}',a_{12}',a_{22}',b_1',b_2',c'),$$

则称这个函数 f 为二次曲线方程(19.1)在直角坐标变换下的**不变量**.

我们来研究二次曲线方程(19.1)的系数的下列诸函数：

$$I_1=a_{11}+a_{22}, \quad I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix},$$

$$K_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}.$$

下面我们将要证明 I_1,I_2,I_3 是二次曲线方程(19.1)在直角坐标变换下的不变量；K_1 是旋转变换下的不变量；当 $I_2=I_3=0$ 时，K_1 也是平移下的不变量.

因为任一个一般坐标变换都是平移和旋转的复合，因此要证 I_1,I_2,I_3 在一般坐标变换下不变，只需分别证明它们在平移下和在旋转下都不变就行了.

在坐标系的平移变换下，二次项系数显然是不变的，故 I_1,I_2 在平移下不变. 注意 $-I_1,I_2$ 分别是二次项系数矩阵 $\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ 的迹和行列式，也就是特征多项式 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0|$ 的一次项系数和常数项. 在坐标系的旋转变换 $(x,y)=(x',y')\boldsymbol{T}$ 下，新的二次项系数 $\boldsymbol{A}_0'$ 矩阵是 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}^T=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}^{-1}$，由于相似矩阵有相同的特征多项式(定理 16.5)，因此变换前后特征多项式的一次项系数和常数项不变，这说明 I_1,I_2 在旋转下都是不变的.

下面说明 I_3 在坐标变换下也是不变的. 用 $\boldsymbol{A}$ 表示二次曲线的矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{bmatrix}$，那么 $I_3=\det\boldsymbol{A}$. 设坐标变换是 $(x,y)=(x',y')\boldsymbol{T}+(x_0,y_0)$，记 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y)$，$\boldsymbol{\alpha}'=(x',y')$，$\boldsymbol{\alpha}_0=(x_0,y_0)$，坐标变换重新写成 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\alpha}_0$. 把二次曲线方程写成矩阵形式

$$\begin{aligned} F&=(x,y,1)\boldsymbol{A}(x,y,1)^T \\ &=(\boldsymbol{\alpha},1)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},1)^T \\ &=(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\alpha}_0,1)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{T}+\boldsymbol{\alpha}_0,1)^T \\ &=(\boldsymbol{\alpha}',1)\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}^T & \boldsymbol{\alpha}_0^T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}',1)^T. \end{aligned}$$

即在新坐标系中曲线方程的矩阵

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}^T & \boldsymbol{\alpha}_0^T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}. \tag{19.3}$$

故
$$I_3'=\det\boldsymbol{A}'=\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{\alpha}_0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\det\boldsymbol{A}\cdot\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}^T & \boldsymbol{\alpha}_0^T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}=\det\boldsymbol{A}=I_3.$$

即 I_3 是坐标变换下的不变量. 因而我们有

定理 19.1　I_1,I_2,I_3 是直角坐标变换下的不变量.

记 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2)$，$\boldsymbol{\beta}'=(b_1',b_2')$. 于是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{\beta}^T \\ \boldsymbol{\beta} & c \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_0' & \boldsymbol{\beta}'^T \\ \boldsymbol{\beta}' & c' \end{bmatrix}$. 由

(19.3)知

$$\boldsymbol{A}'=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\alpha}_0 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{\beta}^T\\ \boldsymbol{\beta} & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}^T & \boldsymbol{\alpha}_0^T\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}^T & \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\alpha}_0^T+\boldsymbol{\beta}^T)\\ (\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{T}^T & \boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\alpha}_0^T+2\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\beta}^T+c\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}_0'=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{T}^T,\quad \boldsymbol{B}'=(\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{T}^T,\quad c'=\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{\alpha}_0^T+2\boldsymbol{\alpha}_0\boldsymbol{\beta}^T+c. \tag{19.4}$$

在旋转之下，$\boldsymbol{\alpha}_0=0$. 由(19.4)，容易验证

$$a_{11}'+a_{22}'=a_{11}+a_{22},b_1'^2+b_2'^2=b_1^2+b_2^2,c'=c.$$

因此

$$K_1'=\begin{vmatrix}a_{11}' & b_1'\\ b_1' & c'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}' & b_2'\\ b_2' & c'\end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}'+a_{22}')c'-(b_1'^2+b_2'^2)$$

$$=(a_{11}+a_{22})c-(b_1^2+b_2^2)=K_1.$$

所以 K_1 是旋转不变量.

若 $I_2=I_3=0$，知 $I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$，故 a_{11},a_{22} 不全为 0. 不妨设 $a_{22}\neq 0$，记 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=t$，则

$$I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}ta_{12} & ta_{22} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & b_1-tb_2\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{vmatrix}$$

$$=(b_1-tb_2)\begin{vmatrix}a_{12} & a_{22}\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=(b_1-tb_2)\begin{vmatrix}ta_{22} & a_{22}\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=-a_{22}(b_1-tb_2)^2,$$

故 $I_3=0$ 推出 $b_1=tb_2$. 所以有 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}=t$.

在坐标轴平移 $\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0\end{cases}$ 之下，(19.4)中的 $\boldsymbol{T}$ 是单位矩阵，因此 $a_{11}'=a_{11}$，$b_1'=a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1,c'=a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+2a_{12}x_0y_0+2b_1x_0+2b_2y_0+c$.

所以

$$\begin{vmatrix}a_{11}' & b_1'\\ b_1' & c'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1\\ a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1 & a_{11}x_0^2+a_{22}y_0^2+2a_{12}x_0y_0+2b_1x_0+2b_2y_0+c\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}y_0+b_1\\ a_{11}x_0+a_{12}y_0+b_1 & a_{12}x_0y_0+a_{22}y_0^2+b_{11}x_0+2b_2y_0+c\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}y_0+b_1 \\ a_{12}y_0+b_1 & a_{22}y_0^2+2b_2y_0+c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ta_{12} & ta_{22}y_0+tb_2 \\ a_{12}y_0+b_1 & a_{22}y_0^2+2b_2y_0+c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ta_{12} & ta_{22}y_0+tb_2 \\ b_1 & b_2y_0+c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} ta_{12} & a_{12}y_0+b_1 \\ tb_2 & b_2y_0+c \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ta_{12} & b_1 \\ tb_2 & c \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix}.$$

以上第五、七个等号要求 $t\neq 0$,容易验证 $t=0$ 时,该等式也成立.

类似地可知 $\begin{vmatrix} a_{22}' & b_2' \\ b_2' & c' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix}$. 因此 $K_1'=K_1$.

综合以上计算,我们有

定理 19.2　K_1 是旋转下的不变量. 当 $I_2=I_3=0$ 时,K_1 也是平移下的不变量.

2. 利用不变量确定二次曲线的类型

在上一节我们通过坐标变换,把一般二次曲线的方程化简为下列三种形式之一:

(18.4)　$$a_{11}'\bar{x}^2+a_{22}'\bar{y}^2+u_0=0,$$

(18.6)　$$a_{22}'\bar{y}^2+2b_1'\bar{x}=0,$$

(18.7)　$$a_{22}'\bar{y}^2+\bar{c}=0,$$

并根据它们系数的不同情形,判别它们属于九类曲线中的哪一类.

如果我们不需要寻找具体的坐标系,可以借助于二次曲线方程的不变量,直接写出化简后方程的系数,并用不变量来判别曲线是何种类型. 具体做法是:将上述方程(18.4)、(18.6)及(18.7)中的系数用方程(19.1)的不变量来表示,并且把用上述方程系数表示的判别式换成用不变量表示.

方程(18.4)是由方程(19.1)经过坐标变换得到的,所以有

$$I_1'=I_1,\quad I_2'=I_2,\quad I_3'=I_3,$$

即

$$a_{11}'+a_{22}'=I_1,\quad a_{11}'a_{22}'=I_2,\quad a_{11}'a_{22}'u_0=I_3.$$

于是 a_{11}',a_{22}' 是特征方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0|=0$ 的两个特征根 λ_1 及 λ_2,

$$u_0=\frac{I_3}{a_{11}'a_{22}'}=\frac{I_3}{I_2},$$

从而得到:方程(18.4)用不变量表示系数时,写为

$$\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\frac{I_3}{I_2}=0, \tag{19.5}$$

此处 λ_1,λ_2 是方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 的两个根.

原来判别方程(18.4)表示何种曲线的判别条件,例如当 $a'_{11}a'_{22}>0,u_0\neq 0,a'_{11}u_0<0$ 时表示椭圆,这个条件用不变量如何表示呢?

$$a'_{11}a'_{22}>0,\quad 即\quad I_2>0.$$

又因为 $I_2\neq 0$,所以 $u_0\neq 0\Leftrightarrow I_3\neq 0$. 因为 a'_{11} 与 a'_{22} 同号,所以 I_1 与 a'_{11} 同号. 又因为 $I_2>0$,所以 u_0 与 I_3 同号. 因此 $a'_{11}u_0<0$,即 $I_1I_3<0$. 于是得到用不变量表示的判别条件 1°～5°:

1° 当 $I_2>0,I_3\neq 0,I_1I_3<0$ 时,表示椭圆.

2° 当 $I_2>0,I_3\neq 0,I_1I_3>0$ 时,表示虚椭圆.

3° 当 $I_2>0,I_3=0$ 时表示一点.

以上三类曲线 $I_2>0$,称为**椭圆类型**的.

4° 当 $I_2<0,I_3\neq 0$ 时,表示双曲线.

5° 当 $I_2<0,I_3=0$ 时,表示一对相交直线.

以上两类曲线 $I_2<0$,称为**双曲类型**的.

我们来看方程(18.6). 对于它,$I'_1=a'_{22},I'_2=0,I'_3=-a'_{22}b'^2_1$,所以

$$a'_{22}=I_1,\quad I_2=0,\quad b'_1=\pm\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}},$$

于是(18.6)用不变量表示其系数时,写为

$$I_1 y^2\pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x=0. \tag{19.6}$$

原来的判别条件 6°($a'_{11}a'_{22}=0,a'_{11}=0,b'_1\neq 0$)用不变量表示:$a'_{11}a'_{12}=0$ 即 $I_2=0$,$a'_{11}=0$ 就表示 $a'_{22}\neq 0$;再加上 $b'_1\neq 0$ 就是 $I_3\neq 0$. 于是得到判别条件

6° 当 $I_2=0,I_3\neq 0$ 时,表示抛物线.

最后来看方程(18.7),对于它 $I'_1=a'_{22},I'_2=0,I'_3=0,K^{\prime\prime}=a'_{22}\bar{c}$,所以有

$$a'_{22}=I_1,\quad I_2=I_3=0,\quad \bar{c}=\frac{K_1}{I_1},$$

于是(18.7)用不变量表示其系数时写为

$$I_1 y^2+\frac{K_1}{I_1}=0. \tag{19.7}$$

原来的判别条件,例如 7°($a'_{11}a'_{22}=0,a'_{11}=0,b'_1=0,a'_{22}\bar{c}<0$)用不变量表示:$a'_{11}a'_{22}=0$ 即 $I_2=0$;由 $a'_{11}=0,b'_1=0$(及 $a'_{12}=0$)得 $I_3=0$;又 $a'_{22}\bar{c}=K_1$,所以$a'_{22}\bar{c}<0$ 即 $K_1<0$. 于是,我们有

7° 当 $I_2=0, I_3=0, K_1<0$ 时,表示一对平行直线.

8° 当 $I_2=0, I_3=0, K_1>0$ 时,表示一对虚平行直线.

9° 当 $I_2=0, I_3=0, K_1=0$ 时,表示一对重合直线.

以上四类曲线 $I_2=0$,称为**抛物类型**的.

我们把 $I_3\neq 0$ 的二次曲线叫**常态二次曲线**,$I_3=0$ 的二次曲线叫**变态二次曲线**,或**退化的二次曲线**.凡变态的二次曲线,皆退化为二直线(实的或虚的,平行的或相交的或重合的),常态的又叫**非退化的**.

不变量 I_1, I_2, I_3 及 K_1 完全能够确定二次曲线的类型和形状,因此我们称这四个不变量组成二次曲线的**不变量的完全系统**,I_1, I_2, I_3 叫**基本不变量**,K_1 叫**条件不变量**,二次曲线的其他不变量都可以由它们表示.

这样,对于任意给出的二元二次方程,我们可以不经过坐标变换,只要计算出它的不变量,就能判定它表示哪种曲线,而且可以直接写出它的规范方程,从而确定其具体形状.也能直接确定它们在原坐标系中的位置,但计算比较复杂.①

例 1　不经过坐标变换,判别二次方程

$$5x^2-6xy+5y^2-6\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-4=0$$

表示何种曲线,并写出它的规范方程.

解　$I_1=10, I_2=16, I_3=-128$.因为 $I_2>0$,属椭圆类型,又 $I_3\neq 0, I_1I_3<0$,表示椭圆.方程 $\lambda^2-10\lambda+16=0$ 的两个根为 $\lambda_1=2, \lambda_2=8$,又 $\dfrac{I_3}{I_2}=-8$,故所求规范方程为

$$2x^2+8y^2-8=0,$$

化成标准方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$$

□

例 2　就 λ 的值讨论方程

$$\lambda x^2-2xy+\lambda y^2-2x+2y+5=0$$

表示什么曲线.

解　第一步:先计算各不变量

---

①　关于椭圆和双曲线位置的直接确定,可参考吴光磊等编《解析几何》(修订本)第五章 § 4,(1962年,人民教育出版社).

关于抛物线可参考王敬庚:《一般二次曲线为抛物线时位置的确定》(《数学通报》,1983 年第 2 期).

$$I_1=2\lambda,\quad I_2=(\lambda-1)(\lambda+1),$$
$$I_3=(\lambda-1)(5\lambda+3),\quad K_1=2(5\lambda-1).$$

第二步：找出使 I_2 及 I_3 为零的 λ 值，

$$I_2=0\Leftrightarrow\lambda=1,-1,$$

$$I_3=0\Leftrightarrow\lambda=1,-\frac{3}{5}.$$



图 19-1

并在 λ 数轴上描出这些点，如图 19-1.

第三步：按照由使 $I_2=0$ 的 λ 值把 λ 轴分成的几个区间，然后从左向右逐个讨论.

$\lambda<-1$ 时，$I_3>0$，$I_2>0$，$I_1<0$，表示椭圆；

$\lambda=-1$ 时，$I_2=0$，$I_3\neq0$，表示抛物线；

$-1<\lambda<1$ 时，$I_2<0$，$\lambda\neq-\frac{3}{5}$ 时，$I_3\neq0$，表示双曲线；

$\lambda=-\frac{3}{5}$ 时，$I_3=0$，表示一对相交直线；

$\lambda=1$ 时，$I_2=0$，$I_3=0$，$K_1>0$，表示一对虚平行直线；

$\lambda>1$ 时，$I_2>0$，$I_3>0$，$I_1>0$，表示虚椭圆.

第四步：将上述讨论结果，标在 λ 数轴相应区间的上方，如图 19-2. 这样做的好处一是直观，二是等于检查一遍，是否遗漏了某些 λ 值没有讨论. □

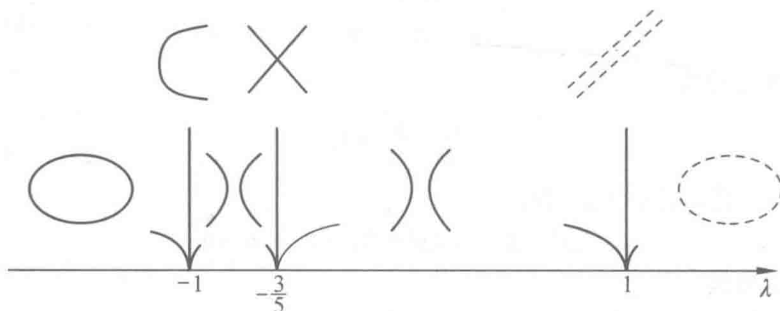


图 19-2

研究问题：

构造一个含参数 λ 的二元二次方程，使得当 λ 取不同值时，它可以表示全部九种不同类型的二次曲线.

(可参考《数学通报》1988年第4期王敬庚:《含一个参数的二元二次方程表示九种不同曲线的例子》)

习 题 十 九

1. 用不变量判别下列方程表示何种曲线:

①$x^2+2xy+2y^2-6x-2y+9=0$;

②$x^2+6xy+9y^2-2x-6y=0$;

③$x^2-2xy-y^2+8x-6=0$;

④$4x^2-20xy+25y^2+12x-30y+9=0$.

2. 试计算下列曲线的不变量 I_1,I_2,I_3,K_1:

①$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$;　　②$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

③$y^2=2px$;　　④$x^2+K=0$.

3. 就 λ 值讨论下列方程表示何种曲线:

①$\lambda x^2+2xy+\lambda y^2-2x-2y+1=0$;

②$x^2+2\lambda xy+\lambda y^2-2\lambda x-2y+\lambda=0$.

4. 不作坐标变换,写出下列曲线的规范方程.若是椭圆或双曲线,求出它的两个半轴长;若是抛物线,求出首通径(即 $2p$).

①$8x^2+4xy+5y^2+16x+4y-28=0$;

②$4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51=0$;

③$x^2-2xy+y^2+6x-14y+29=0$.

5. 证明方程

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0$$

①表示圆,必须且只需 $I_1^2=4I_2$, $I_1I_3<0$;

②表示一条等轴双曲线或两条互相垂直的直线,必须且只需 $a_{11}+a_{22}=0$.

6. 利用椭圆的面积公式,即 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积为 πab,求椭圆 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1$ 的面积.

7. 二次曲线 $3x^2+4xy+2x+4y+k=0$ 中的 k 为何值时,它表示两条直线? 并求这两条直线的方程.

8. 给定方程 $(A_1x+B_1y+C_1)^2+(A_2x+B_2y+C_2)^2=1$,其中 $A_1B_2-A_2B_1=1$, $A_1A_2+B_1B_2=0$.证明它是椭圆,并求标准方程.

§20 二次曲线的切线、法线和对称性

1. 二次曲线和直线的相关位置，切线法线和渐近方向

已知一般二次曲线为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c=0,\tag{20.1}$$

为了方便起见，我们引进下列记号：

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c,$$
$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+b_1\text{①},$$
$$F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+b_2,$$
$$\Phi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2.$$

现在，我们来讨论过点 $P_0(x_0,y_0)$ 且以 $\mu:\nu$ 为方向（或说以 (μ,ν) 为方向，或说以 $\frac{\nu}{\mu}$ 为斜率）的直线

$$l:\quad\begin{cases}x=x_0+\mu t,\\ y=y_0+\nu t\end{cases}\tag{①}$$

与二次曲线(20.1)的交点．将方程①代入(20.1)，经过整理，并使用上述方便记号，得 t 的二次方程

$$\Phi(\mu,\nu)t^2+2[F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu]t+F(x_0,y_0)=0.\tag{②}$$

若 $\Phi(\mu,\nu)\neq0$，则方程②有两个实根或两个共轭虚根．当它有两个不同的实根时，l 与二次曲线有两个不同的实交点，l 称为**二次曲线的割线**；当它有二相等的实根时，即 l 与二次曲线有重合交点；当它有共轭虚根时，l 与二次曲线交于二共轭虚点．

若 $\Phi(\mu,\nu)=0$，方程②又有三种情况：

当 $F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu\neq0$ 时，方程②有一解，即 l 与二次曲线交于一点．

---

① 为了便于记忆，可以借用偏导数的记号

$$F_1(x,y)=\frac{1}{2}F'_x(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(x,y)}{\partial x},$$
$$F_2(x,y)=\frac{1}{2}F'_y(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}.$$

当 $F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu=0$ 时,而 $F(x_0,y_0)\neq 0$ 时,方程②无解,l 与二次曲线无交点.

当 $F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu=0$,且 $F(x_0,y_0)=0$ 时,方程②为一切的 t 所满足,直线 l 全部落在二次曲线上.

定义 20.1　如果直线与二次曲线有重合交点,那么这条直线称为**二次曲线的切线**,重合交点称为**切点**.如果直线全部落在二次曲线上,我们也称这条直线为二次曲线的切线,直线上的每一点都可以看作切点.

现在我们来推导二次曲线(20.1)上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程.

设过 P_0 的直线 l 的方程为①,则 l 和二次曲线相切的条件当 $\Phi(\mu,\nu)\neq 0$ 时,是

$$[F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu]^2-\Phi(\mu,\nu)F(x_0,y_0)=0. \tag{20.2}$$

因为 $P_0(x_0,y_0)$ 在二次曲线(20.1)上,所以有 $F(x_0,y_0)=0$,因此(20.2)可以化为

$$F_1(x_0,y_0)\mu+F_2(x_0,y_0)\nu=0. \tag{20.3}$$

当 $\Phi(\mu,\nu)=0$ 时,因为有 $F(x_0,y_0)=0$,所以相切的条件也是(20.3).

因此适合条件(20.3)的 μ,ν 就确定了所求切线的方向 $\mu:\nu$,将其代入直线方程①,即得所求切线.

当 $F_1(x_0,y_0)$ 及 $F_2(x_0,y_0)$ 不全为零时,由(20.3)得

$$\mu:\nu=F_2(x_0,y_0):[-F_1(x_0,y_0)],$$

代入直线方程①得

$$\frac{x-x_0}{F_2(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{-F_1(x_0,y_0)},$$

即 $(x-x_0)F_1(x_0,y_0)+(y-y_0)F_2(x_0,y_0)=0$.

再利用 $F(x_0,y_0)=0$,即可化成

$$a_{11}x_0x+a_{12}(x_0y+y_0x)+a_{22}y_0y+b_1(x_0+x)+b_2(y_0+y)+c=0. \tag{20.4}$$

这就是二次曲线(20.1)上的 P_0 点处的切线方程.

当 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$ 时,(20.3)变成恒等式,为一切的 μ,ν 所满足.因此(20.3)不能唯一确定 $\mu:\nu$,即过 P_0 点的切线不能唯一确定,或者说,过 P_0 的每一条直线都可以看成是二次曲线的切线.

我们把二次曲线(20.1)上满足 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$ 的点 (x_0,y_0) 称做**二次曲线**(20.1)**的奇异点**(简称**奇点**).非奇异点称为**正常点**.于是我们有如下结论:

二次曲线(20.1)上的正常点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程为(20.4)，而奇点处的切线不定.

方程(20.4)有一个简捷的记忆方法：在方程(20.1)中，将

	x^2	$2xy$	y^2	$2x$	$2y$
写成	xx	$xy+xy$	yy	$x+x$	$y+y$

然后每一项中一个 x 或 y 用 x_0 或 y_0 代替后，写成

$$x_0x \qquad x_0y+xy_0 \qquad y_0y \qquad x+x_0 \qquad y+y_0$$

就得到(20.4)了.

思考题：若 $P_0(x_0,y_0)$ 不在二次曲线(20.1)上，如何推导过 P_0 点的切线方程？

定义 20.2　过曲线上一点，垂直于该点切线的直线称为曲线在该点处的**法线**.

由前面对切线的讨论，我们知道二次曲线在奇异点处的法线是不确定的. 在正常点处，过曲线上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方向为 $F_2(x_0,y_0):(-F_1(x_0,y_0))$，故法线方向可取为 $F_1(x_0,y_0):F_2(x_0,y_0)$，所以法线方程为 $\dfrac{x-x_0}{F_1(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_2(x_0,y_0)}$.

例 1　求二次曲线 $2x^2+6xy+y^2-2x+2y=0$ 过原点的切线和法线.

解　原点在二次曲线上，故切线方程是

$$2x_0x+3(x_0y+xy_0)+y_0y-(x+x_0)+(y+y_0)=0,$$

其中 $x_0=y_0=0$，得 $x-y=0$. 切线方向为(1,1)，故法线方向可取(1,−1). 所以法线方程为 $x+y=0$. □

定义 20.3　满足条件 $\Phi(\mu,\nu)=0$ 的方向 (μ,ν) 称为二次曲线(20.1)的**渐近方向**，否则称为**非渐近方向**.

因为 $\Phi(\mu,\nu)=a_{11}\mu^2+2a_{12}\mu\nu+a_{22}\nu^2=0$，把它看成 $\dfrac{\mu}{\nu}$ 的二次方程，判别式是 $-I_2=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$，于是有

定理 20.1　椭圆型曲线($I_2>0$)无实的渐近方向；双曲型曲线($I_2<0$)有两个实的渐近方向；抛物型曲线($I_2=0$)有一个渐近方向.

2. 二次曲线的对称中心

定义 20.4　点 P 称为**二次曲线** S **的对称中心**(简称**中心**)，如果 S 上任意

一点 Q 关于 P 的对称点 Q' 仍在 S 上.

定理 20.2　$P(x_0,y_0)$ 是二次曲线 S 的对称中心,当且仅当 (x_0,y_0) 是线性方程组 $\begin{cases}F_1(x,y)=0\\F_2(x,y)=0\end{cases}$ 的解.

证　设 $P(x_0,y_0)$ 是二次曲线 S 的中心,$Q(x,y)$ 是 S 上的任意一点,则 Q 关于 P 的对称点 $Q'(2x_0-x,2y_0-y)$ 仍在 S 上,故有 $\begin{cases}F(x,y)=0,\\F(2x_0-x,2y_0-y)=0.\end{cases}$ 把第一个式子带入第二个式子,并整理得到

$$(x_0-x)F_1(x_0,y_0)+(y_0-y)F_2(x_0,y_0)=0.$$

由 $Q(x,y)$ 是 S 上的任意一点,得到 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$.

反之,若 $F_1(x_0,y_0)=F_2(x_0,y_0)=0$,设 $Q(x,y)$ 是 S 上的任意一点,即 $F(x,y)=0$,容易验证 Q 关于 $P(x_0,y_0)$ 的对称点 $Q'(2x_0-x,2y_0-y)$ 满足 $F(2x_0-x,2y_0-y)=0$,即 Q' 也在 S 上.

由定理 20.2 知,若 $I_2\neq0$,二次曲线 S 有唯一中心,此时称 S 是**中心型曲线**;若 $I_2=0$,且 $I_3=0$,容易推出 $\frac{a_{11}}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$,从而方程组 $\begin{cases}F_1(x,y)=0,\\F_2(x,y)=0\end{cases}$ 实际上只有一个方程 $F_1(x,y)=0$ 或者 $F_2(x,y)=0$,此时 S 有无穷多个中心,它们组成一条直线 $F_1(x,y)=0$,我们称这样的二次曲线为**线心曲线**;若 $I_2=0$,且 $I_3\neq0$,此时 S 无对称中心,我们称之为**无心曲线**. 无心曲线和线心曲线统称**非中心型曲线**.

定义 20.5　通过二次曲线的中心且以渐近方向为方向的直线称为**二次曲线的渐近线**.

3. 二次曲线的对称轴

定义 20.6　直线 l 称为曲线 S 的对称轴,如果对于 S 上的任意一点 Q,它关于 l 的对称点 Q' 也在 S 上.

设 (μ,ν) 是二次曲线(20.1)的一个非渐近方向,则具有方向 (μ,ν) 的一条直线与(20.1)总交于两点 P_1 和 P_2(两不同实点,两重合实点或一对共轭虚点),线段 P_1P_2 称为平行于方向 (μ,ν) 的一条**弦**. 现在我们来讨论所有平行于方向 (μ,ν) 的弦的中点的轨迹.

设 $P(X,Y)$ 是一条平行于 (μ,ν) 的弦 P_1P_2 的中点,P_1P_2 的方程可写为 $\begin{cases}x=X+\mu t,\\y=Y+\nu t,\end{cases}$ 它与二次曲线(20.1)的两个交点 P_1 和 P_2 所对应的参数 t_1,t_2 是

二次方程

$$\Phi(\mu,\nu)t^2+2[\mu F_1(X,Y)+\nu F_2(X,Y)]t+F(X,Y)=0 \quad ③$$

的两个根. 因为 $P(X,Y)$ 是弦 P_1P_2 的中点, 所以有

$$t_1+t_2=0.$$

于是得到

$$\mu F_1(X,Y)+\nu F_2(X,Y)=0, \quad ④$$

即 $$(a_{11}X+a_{12}Y+b_1)\mu+(a_{12}X+a_{22}Y+b_2)\nu=0.$$

这就是说, 平行于方向 (μ,ν) 的弦的中点 (X,Y) 的坐标满足方程

$$(a_{11}x+a_{12}y+b_1)\mu+(a_{12}x+a_{22}y+b_2)\nu=0, \quad (20.5)$$

即 $$(a_{11}\mu+a_{12}\nu)x+(a_{12}\mu+a_{22}\nu)y+b_1\mu+b_2\nu=0. \quad (20.6)$$

反过来, 若点 (X,Y) 满足方程(20.5)或(20.6), 即有④成立, 因而方程③有绝对值相等符号相反的两个根, 于是点 (X,Y) 是具有方向 (μ,ν) 的弦的中点. 因此方程(20.5)或(20.6)是所有平行于方向 (μ,ν) 的弦的中点的轨迹.

又方程(20.6)的一次项系数不能全为零, 否则由

$$a_{11}\mu+a_{12}\nu=0 \text{ 及 } a_{12}\mu+a_{22}\nu=0$$

得到

$$\begin{aligned}\Phi(\mu,\nu)&=a_{11}\mu^2+2a_{12}\mu\nu+a_{22}\nu^2\\&=(a_{11}\mu+a_{12}\nu)\mu+(a_{12}\mu+a_{22}\nu)\nu=0,\end{aligned}$$

与 (μ,ν) 是非渐近方向矛盾. 因此方程(20.5)或(20.6)确是二元一次方程, 表示直线.

于是我们得到:

二次曲线(20.1)的所有方向为 (μ,ν) 的平行弦中点的轨迹是一条直线, 它的方程是(20.5)或(20.6).

定义 20.7 二次曲线的平行弦中点的轨迹是一条直线, 这条直线称为共轭于平行弦方向的**直径**. 这条直径的方向称为平行弦方向的**共轭方向**.

二次曲线(20.1)的共轭于非渐近方向 (μ,ν) 的直径方程为(20.5)或(20.6), 因此该直径的方向为 (μ',ν'), 此处

$$\mu'=-(a_{12}\mu+a_{22}\nu), \nu'=a_{11}\mu+a_{12}\nu. \quad (20.7)$$

由于

$$\begin{aligned}\Phi(\mu',\nu')&=a_{11}(a_{12}\mu+a_{22}\nu)^2-2a_{12}(a_{12}\mu+a_{22}\nu)(a_{11}\mu+a_{12}\nu)+\\&\quad a_{22}(a_{11}\mu+a_{12}\nu)^2\\&=(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{11}\mu^2+2a_{12}\mu\nu+a_{22}\nu^2)\\&=I_2\Phi(\mu,\nu),\end{aligned}$$

又(μ,ν)是非渐近方向,故$\Phi(\mu,\nu)\neq 0$.因此当$I_2\neq 0$时,有$\Phi(\mu',\nu')\neq 0$;当$I_2=0$时,有$\Phi(\mu',\nu')=0$.也就是说,对于$I_2\neq 0$的二次曲线的非渐近方向的共轭方向仍然是非渐近方向,而对于$I_2=0$的二次曲线任意非渐近方向的共轭方向都是渐近方向.

因此,对于$I_2=0$的二次曲线,所有的直径皆是互相平行的,皆平行于二次曲线的唯一的渐近方向.

当$I_2\neq 0$时,我们进一步考察非渐近方向(μ',ν')的共轭方向(μ'',ν''),根据(20.7)得

$$\mu''=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})\mu,\quad \nu''=(a_{12}^2-a_{11}a_{22})\nu,$$

即

$$\mu''=-I_2\mu,\quad \nu''=-I_2\nu.$$

因为$I_2\neq 0$,所以(μ'',ν'')与(μ,ν)表示同一个方向,它们的斜率都是$\frac{\nu}{\mu}$.这就是说当$I_2\neq 0$时,如果(μ',ν')是(μ,ν)的共轭方向,则(μ,ν)也是(μ',ν')的共轭方向.也就是说,对于$I_2\neq 0$的二次曲线,共轭方向是互相的,即适合关系(20.7)的一对非渐近方向(μ,ν)及(μ',ν')是互相共轭的.

$I_2\neq 0$时,如果我们对渐近方向(μ,ν)也用(20.7)去计算共轭方向(μ',ν'),则得到$\frac{\nu'}{\mu'}=\frac{\nu}{\mu}$.因此我们有时也说,渐近方向是自共轭的.

定义 20.8　当$I_2\neq 0$时,二次曲线的一对具有互相共轭的方向的直径,叫做一对**共轭直径**.

例 2　求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$共轭于方向$(\mu,\nu)$的直径及其共轭直径.

解　$F_1(x,y)=\frac{x}{a^2}$,　$F_2(x,y)=\frac{y}{b_2}$.

由(20.5)得直径$\frac{\mu}{a^2}x+\frac{\nu}{b^2}y=0$,该直径的方向为$\left(-\frac{\nu}{b^2},\frac{\mu}{a^2}\right)$,再由(20.5)得它的共轭直径为

$$\frac{x}{a^2}\left(-\frac{\nu}{b^2}\right)+\frac{y}{b^2}\left(\frac{\mu}{a^2}\right)=0,$$

即

$$\nu x-\mu y=0.$$

□

例 3　已知$I_2\neq 0$的二次曲线(20.1)的一对共轭直径的斜率为k及k',试求k,k'应满足的关系.

解　斜率为k及k'的方向分别为$(1,k)$及$(1,k')$,由一对共轭方向应该适合

的关系式(20.7)得

$$1=-(a_{12}+a_{22}k),k'=a_{11}+a_{12}k,$$

于是有

$$\frac{1}{k'}=\frac{-(a_{12}+a_{22}k)}{a_{11}+a_{12}k},$$

整理得

$$a_{22}kk'+a_{12}(k+k')+a_{11}=0.$$

这就是一对共轭直径的斜率 k,k' 应满足的关系式. □

如果 l 是二次曲线的对称轴,那么它一定是一组平行弦中点的轨迹,并且 l 与这组平行弦垂直. 设这组平行弦的方向是(μ,ν),则 l 的方程是(20.6). 由于 l 的方向$(-(a_{12}\mu+a_{22}\nu),a_{11}\mu+a_{12}\nu)$与$(\mu,\nu)$垂直,故有

$$-\mu(a_{12}\mu+a_{22}\nu)+\nu(a_{11}\mu+a_{12}\nu)=0,$$

即

$$(a_{11}\mu+a_{12}\nu):\mu=(a_{12}\mu+a_{22}\nu):\nu.$$

如果记这个比值为 λ,则有

$$\begin{cases}a_{11}\mu+a_{12}\nu=\lambda\mu,\\ a_{12}\mu+a_{22}\nu=\lambda\nu,\end{cases}\text{或}(\mu,\nu)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}=\lambda(\mu,\nu).$$

也就是说 λ 是方程(20.1)的二次项部分的特征值,而(μ,ν)是 λ 的特征向量. 这个过程反过来也成立. 因此我们有

定理 20.3 设(μ,ν)是二次曲线 S 的二次项系数矩阵的特征向量,并且(μ,ν)不是渐近方向,则 S 的对称轴方程可由 $\mu F_1(x,y)+\nu F_2(x,y)=0$ 给出.

如果 S 的二次项系数矩阵 $\boldsymbol{A}_0$ 有 0 特征值,并且(μ,ν)是属于 0 的特征向量,即$(\mu,\nu)\boldsymbol{A}_0=\boldsymbol{0}$,则 $\Phi(\mu,\nu)=(\mu,\nu)\boldsymbol{A}_0(\mu,\nu)^T=0$,所以$(\mu,\nu)$是渐近方向;如果$(\mu,\nu)$是属于非 0 特征值 λ 的特征向量,即$(\mu,\nu)\boldsymbol{A}_0=\lambda(\mu,\nu)$,则 $\Phi(\mu,\nu)=(\mu,\nu)\boldsymbol{A}_0(\mu,\nu)^T=\lambda(\mu^2+\nu^2)\neq0$,所以$(\mu,\nu)$不是渐近方向. 另外,如果 $\boldsymbol{A}_0$ 的两个特征值不相等,由习题十六第 4 题的结论,它们对应的特征向量垂直;如果 $\boldsymbol{A}_0$ 的两个特征值相等,由定理 16.7,$\boldsymbol{A}_0$ 正交相似于 $\lambda\boldsymbol{I}$,其中 λ 是特征值,从而 $\boldsymbol{A}_0=\lambda\boldsymbol{I}$,故所有非零向量都是 $\boldsymbol{A}_0$ 的特征向量. 事实上,由 $a_{11}=a_{22}=\lambda\neq0,a_{12}=0$ 可得 S 是一个圆周(或虚圆周或一个点). 由此我们得出:若 $I_2=0$,则二次曲线只有一条对称轴;若 $I_2\neq0$,并且 $\boldsymbol{A}_0$ 的两个特征值不相等,则二次曲线有两条对称轴;若 $I_2\neq0$,并且 $\boldsymbol{A}_0$ 的两个特征值相等,则二次曲线有无数条对称轴.

例 4 判断下列二次曲线的类型并求对称轴.

(1)$x^2-3xy+y^2+10x-10y+21=0$.

(2)$x^2+4xy+4y^2-20x+10y-50=0$.

解 (1)$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{3}{2}\\ -\dfrac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$. 特征值$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0|=0$,解得

$$\lambda_1=\frac{5}{2},\lambda_2=-\frac{1}{2},I_2=\lambda_1\lambda_2=-\frac{5}{4}.$$

$$I_3=\det\begin{pmatrix}1 & -\frac{3}{2} & 5\\ -\frac{3}{2} & 1 & -5\\ 5 & -5 & 21\end{pmatrix}=-\frac{5}{4}.$$

因此是双曲线.

λ_1 的特征向量是$(\mu_1,\nu_1)(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_0)=0$,解得 $\mu_1=-\nu_1$,可取$(\mu_1,\nu_1)=(1,-1)$.类似地,λ_2 的特征向量满足 $\mu_2=\nu_2$,可取为$(\mu_2,\nu_2)=(1,1)$.它们都对应于非零特征值,因此都是非渐近方向,故对称轴方程为 $\mu_i F_1(x,y)+\nu_i F_2(x,y)=0$,$i=1,2$,整理得

$$x-y+4=0 \text{ 和 } x+y=0.$$

(2)$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$.特征值 $\lambda_1=0,\lambda_2=5,I_2=\lambda_1\lambda_2=0$. $I_3=-625$. 因此曲线是抛物线.

$\lambda_1=0$,因此它对应的特征向量是渐近方向. λ_2 的特征向量满足 $2\mu=\nu$,可取为$(\mu,\nu)=(1,2)$,它是非渐近方向,故对称轴方程为 $\mu F_1(x,y)+\nu F_2(x,y)=0$,整理得 $x+2y=0$. □

习 题 二 十

1. 试决定 k 的值,使直线 $x+ky-1=0$ 与二次曲线 $y^2-2xy-(k-1)y-1=0$ 交于两个互相重合的实点.

2. 求下列二次曲线的奇点:

①$3x^2-2y^2+6x+4y+1=0$;

②$2xy+y^2-2x-1=0$.

3. 求二次曲线 $x^2-xy+y^2+2x-4y-3=0$ 在点(2,1)处的切线方程.

4. 求二次曲线 $x^2-xy+y^2-1=0$ 通过点(0,2)的切线.

5. 求曲线 $4x^2-4xy+y^2-2x+1=0$ 过点(1,3)的切线和法线方程.

6. 求下列二次曲线的渐近方向,并指出曲线是属于何种类型的.

①$x^2+2xy+y^2+3x+y=0$;

②$3x^2+4xy+2y^2-6x-2y+5=0$;

③$2xy-4x-2y+3=0$.

7. 分别决定$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$及$x^2=2py$的渐近方向.

8. 已知二次曲线$3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$,求它的与x轴平行的弦的中点的轨迹.

9. 求下列曲线的中心:

①$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+11=0$;

②$2xy-4x+2y+11=0$;

③$4x^2+4xy+y^2-10x-5y+6=0$;

④$x^2-2xy+y^2-3x+2y-11=0$.

10. 求下列二次曲线的渐近线:

①$xy+x+y=0$;

②$6x^2-xy-y^2+3x+y-1=0$;

③$x^2-3xy+2y^2+x-3y+4=0$;

④$2x^2+2xy+y^2+2x+4y-4=0$.

11. 讨论当α,β满足什么条件时,二次曲线

$$x^2+6xy+\alpha y^2+3x+\beta y-4=0$$

①有唯一中心;②无中心;③有一条中心直线.

12. 证明若$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+c=0$是一条双曲线,则它的渐近线是$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$.

13. 方程$(A_1x+B_1y+C_1)^2+2(A_2x+B_2y+C_2)=0$满足$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$,

$A_1A_2+B_1B_2=0$,证明:

(1)它是抛物线;

(2)它的对称轴是$A_1x+B_1y+C_1=0$;

(3)$A_2x+B_2y+C_2=0$是过顶点的切线.

14. 证明椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的一对共轭直径的斜率$k$和$k'$有关系$k\cdot k'=-\frac{b^2}{a^2}$.

15. 证明双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一对共轭直径的斜率$k$和$k'$有关系$k\cdot k'=\frac{b^2}{a^2}$.

第五章 平面的仿射变换与等距变换

本章我们介绍平面的仿射变换与等距变换的相关概念,并讨论图形在仿射变换和等距变换下的一些不变性质. 按照 F. Klein 在爱尔朗根纲领中的观点,一种几何学就是研究几何对象在某种变换群下不变的性质. 按照这种观点,研究在等距变换群下不变性的几何就是欧氏几何,研究在仿射变换群下不变性的几何可以称作仿射几何.

§21 仿射变换与等距变换

1. 变换与变换群

定义 21.1 设 S,S' 是两个集合,$f:S\to S'$ 是一个映射,如果对任意 $a,b\in S$,都有 $f(a)\neq f(b)$,则称 f 是**一一映射**或**单射**. 如果对任意 $a'\in S'$,都有 $a\in S$,使得 $f(a)=a'$,则称 f 是**满射**. 如果 f 既是单射又是满射,则称 f 是**一一对应**.

例 1 $f,g,h:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$, $f(x)=\mathrm{e}^x$; $g(x)=\sin x$; $h(x)=2x-1$. 则 f 是单射而不是满射,g 既不是单射也不是满射,h 是一一对应.

定义 21.2 设 $f:S\to S'$, $g:S'\to S''$ 是两个映射,它们的复合映射 $g\circ f:S\to S''$,是 S 到 S'' 的映射,称为**映射 f 与 g 的乘积**,记为 $g\cdot f$,即 $(g\cdot f)(a)=g(f(a))$, $\forall a\in S$.

注意乘积与映射的次序有关.

定义 21.3 集合 S 到自身的映射称为 S 的**变换**. 把 S 的每一点变成自己的变换称为**恒等变换**或**单位变换**,记为 id_S.

例 2 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上取定一个右手系直角坐标系$\{O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}\}$,给定非零向量$\boldsymbol{v}=(a,b)$,定义变换 $f,g:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f:(x,y)\mapsto(x,y)+(a,b)$[①]; $g:(x,y)\mapsto(x,y)\boldsymbol{A}$,

① 在本章中"$\to$"通常表示集合之间的映射,"$\mapsto$"表示元素之间的对应. 例如 $f:A\to B$ 表示 f 是集合 A 到 B 的映射, $f:a\mapsto b$ 表示 f 把 a 映为 b 即 $f(a)=b$。

其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$. 称 f 是沿向量 $\boldsymbol{v}$ 的**平移变换**,简称平移变换. 称 g 是绕原点的**旋转变换**,简称旋转变换. 显然平移变换和旋转变换都是平面到自身的一一对应. 其几何意义见图 21-1 和图 21-2.

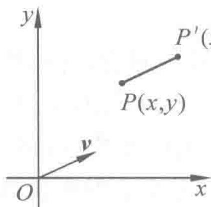


图 21-1

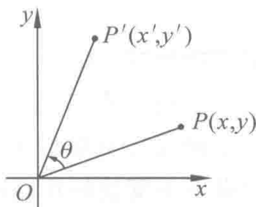


图 21-2

容易验证 $g\cdot f:(x,y)\mapsto(x,y)\mathbf{A}+(a,b)\mathbf{A}$, $f\cdot g:(x,y)\mapsto(x,y)\mathbf{A}+(a,b)$. 故通常 $g\cdot f\neq f\cdot g$.

例 3 在平面 $\mathbf{R}^2$ 上取定一条直线 l,定义变换 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, f 把平面上每一点 P 映到 P 关于直线 l 的对称点. 称映射 f 是关于直线 l 的**反射**,简称反射.

定义 21.4 设 $f:S\to S'$ 是一个映射,如果存在映射 $g:S'\to S$,使得 $g\circ f=id_S$, $f\circ g=id_{S'}$,则称**映射** f 是**可逆的**,称 g 是 f 的**逆映射**.

容易验证如果 f 是可逆映射,则其逆映射是唯一的(留作习题),我们常把 f 的逆映射记为 f^{-1}.

定理 21.1 $f:S\to S'$ 是可逆的, 当且仅当 f 是一一对应.

证 必要性,若 $f:S\to S'$ 是可逆的,记 $g:S'\to S$ 为 f 的逆映射. 对于 $a,b\in S$,如果 $f(a)=f(b)$,则 $g(f(a))=g(f(b))$,即 $a=b$,这说明 f 是单射. 对任意 $a'\in S'$,设 $g(a')=a$,则 $f(a)=f(g(a'))=a'$,从而 f 是满射.

充分性,已知 f 是一一对应. 定义映射 $g:S'\to S$ 如下,对任意. $a'\in S'$,有唯一的 $a\in S$,使得 $f(a)=a'$,令 $g(a')=a$. 因为 $f(g(a'))=f(a)=a'$, $g(f(a))=g(a')=a$,故 $g\circ f=id_S$, $f\circ g=id_{S'}$,即 f 是可逆的,并且 g 是 f 的逆映射. □

定理 21.2 设 $f:S\to S'$, $g:S'\to S''$ 都是可逆的, 则 $g\cdot f$ 也是可逆的.

证 设 $f':S'\to S$, $g':S''\to S'$ 分别是 f,g 的逆映射,容易验证 $f'\cdot g'$ 是 $g\cdot f$ 的逆映射. □

定义 21.5 设 G 是由 S 上的某些可逆变换组成的集合,如果 G 满足以下性质,则我们称 G 是 S 上的一个**变换群**:

(1)对任意 $f\in G$, f 的逆映射在 G 中;

(2)对任意 $f,g\in G$,它们的乘积(复合) $f\cdot g$ 在 G 中.

由定义，如果 G 是 S 上的一个变换群，则 S 上的恒等变换 id_S 一定属于 G.

例 4　平面上所有绕原点的旋转组成的集合是平面上的一个变换群.

证　如果 f 是绕原点旋转 θ 角的变换(此处我们约定当 $\theta>0$ 时是逆时针旋转，当 $\theta<0$ 时是顺时针旋转)，则 f 的逆映射是绕原点旋转 $-\theta$ 角的变换.

如果 f 是绕原点旋转 θ 角的变换，g 是绕原点旋转 φ 角的变换，则 $g\cdot f$ 是绕原点旋转 $\theta+\varphi$ 角的变换.　□

2. 平面的仿射变换

定义 21.6　设 f 是平面上的一个可逆变换，如果 f 把任意共线三点变成共线三点，则称 f 是平面上的一个**仿射变换**.

例 5　在平面 $\mathbf{R}^2$ 的一个直角坐标系中，定义变换 f 为：

(1) $(x',y')=(x,ky)(k>0)$.

这个映射称为向着 x 轴的**压缩变换**，k 称为**压缩比**. 参见图 21-3.

(2) $(x',y')=(x+\lambda y,y)$.

这个映射称为向 x 轴的**错切变换**，x 轴称为**错切轴**. 参见图 21-4.

(3) $(x',y')=(kx,ky)(k\neq 0)$，

这个映射称为**位似中心**在原点的**位似变换**，k 称为**位似比**. 参见图 21-5.

这三个变换都是仿射变换.

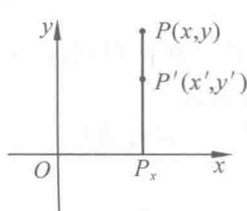


图　21-3

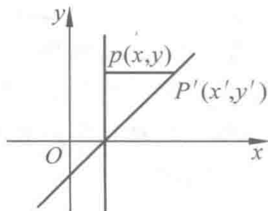


图　21-4

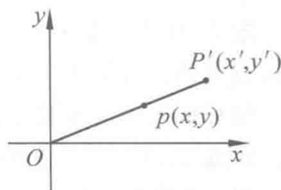


图　21-5

证　这里只证明(1)，(2)和(3)的证明留作习题. f 显然是平面上的一一对应. 假设 $P_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,3$，三点共线，我们要证明 $f(P_i)$，$i=1,2,3$，三点共线. 由于 $P_i(x_i,y_i)$，$i=1,2,3$，三点共线，则有实数 λ 使得 $(x_2-x_1,y_2-y_1)=\lambda(x_3-x_1,y_3-y_1)$. 即 $x_2-x_1=\lambda(x_3-x_1)$，$y_2-y_1=\lambda(y_3-y_1)$. $f(P_i)=(x_i,ky_i)$，故 $(x_2-x_1,ky_2-ky_1)=\lambda(x_3-x_1,ky_3-ky_1)$. 即 $f(P_i)$，$i=1,2,3$，三点共线. 所以 f 是仿射变换.　□

定理 21.3　平面上的仿射变换把不共线的三点变成不共线的三点.

证　设 f 是平面上的仿射变换，A,B,C 是平面上不共线的三点. 假设

$f(A)$，$f(B)$，$f(C)$共线，记这条直线为 l. 由于仿射变换把共线的三点变成共线的三点，因此 f 把直线 AB 映到直线 $f(A)f(B)$，即 l. 类似地，f 把直线 AC，BC 都映到直线 l. 在直线 AB，AC，BC 之外任取一点 P，我们将证明 f 把 P 也映到直线 l 上，从而 f 把整个平面映到直线 l 上，这与 f 是平面上的可逆变换矛盾. 不妨设 P 不是 A 点，过 P 作一条直线与 AB，AC 分别交于 Q，R 点，由于 f 把直线 AB，AC 都映到直线 l，故也把 Q，R 映到 l 上，由于 P，Q，R 共线，故 f 把 P 也映到直线 l 上. □

推论 21.1 平面上的仿射变换把直线变成直线.

推论 21.2 平面上的仿射变换把平行直线变成平行直线.

证 设 f 是平面上的仿射变换，l_1，l_2 是两条平行直线，如果 $f(l_1)$，$f(l_2)$有交点 P，则 P 在 l_1，l_2 上各有一个原象，这与 f 是一一对应矛盾.

定理 21.4 平面上仿射变换的全体组成平面的一个变换群. 称为平面的**仿射变换群**.

证 两个仿射变换的乘积显然还是仿射变换. 设 f 是仿射变换，f 的逆变换是 g，则 g 把共线三点变成共线三点. 否则 g 把某共线三点 A，B，C 变成不共线三点 A'，B'，C'，由于 f 把不共线三点变成不共线三点，但 $f(A')=A$，$f(B')=B$，$f(C')=C$ 三点共线，矛盾. 故 g 也是仿射变换. □

3. 平面的等距变换

定义 21.7 设 f 是平面上的一个变换，如果对于平面上任何两点，f 保持这两点变换前后的距离不变，则称 f 是平面上的一个**等距变换**.

例如例 2 中的平移变换和旋转变换都是等距变换(证明留作习题).

定理 21.5 等距变换一定是可逆变换.

证 f 是平面的一个等距变换，任取两个不同的点 P，Q，由于 $f(P)$，$f(Q)$之间的距离等于 P，Q 之间的距离，因此 $f(P)$和 $f(Q)$是不同的点. 所以 f 是单射.

在平面上任取一点 Q，我们要证明 Q 点有原象 P，从而 f 是满射. 取两个固定点 A，B，记 A，B 在 f 下的象为 A'，B'. 若 Q 是 A'，B'之一，则 Q 有原象. 否则，设 $|A'Q|=a$，$|B'Q|=b$，我们分两种情况讨论：

(1)Q 在 A'，B'决定的直线上，则根据 Q 在 A'，B'之间，Q 与 B'在 A'点异侧，或者 Q 与 A'在 B'点异侧，相应地有 $a+b=|A'B'|$，$b-a=|A'B'|$，$a-b=|A'B'|$. 在直线 AB 上取一点 P，使得 $|AP|=a$，$|BP|=b$，则 $f(P)=Q$. 这是因为 f 等距确保了 $f(P)$在直线 $A'B'$上(否则由于三角形两边之和大于第三边，

这与 f 是等距变换矛盾)，再根据 a,b 与 $|A'B'|$ 的关系可以确定 P 点的位置使 $f(P)=Q$.

(2)Q 不在 A',B' 决定的直线上，此时 $a+b>|A'B'|$. 在平面上分别以 A,B 为圆心 a,b 为半径画圆周，由于 $a+b>|A'B'|=|AB|$，这两个圆周交于两点 P_1,P_2. 则 f 必然把 P_1 或 P_2 映为 Q. □

推论 21.3　等距变换一定是仿射变换.

证　首先等距变换是可逆变换. 又因为等距变换一定把共线三点变成共线三点，否则，由于三角形两边之和大于第三边，与等距变换保持距离不变矛盾.

□

定理 21.6　平面上等距变换的全体组成平面的一个变换群. 称为平面的**等距变换群**.

作为练习请读者自己给出证明.

习题二十一

1. 证明如果 $f:S\to S'$ 是可逆映射，则其逆映射是唯一的.

2. 证明例 5 中(2)和(3)的变换都是仿射变换.

3. 证明定理 21.6.

4. 在平面上取一个右手直角坐标系，给定非零向量 $\boldsymbol{v}=(a,b)$，证明平移变换 $f:(x,y)\mapsto(x,y)+(a,b)$ 和旋转变换 $g:(x,y)\mapsto(x,y)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ 都是等距变换. 计算 $g\cdot f$ 和 $f\cdot g$，并说明二者不相等.

5. 在平面的一个右手直角坐标系中，证明变换 $(x',y')=(x+y-3,3x-y+1)$ 是仿射变换，并求其逆变换.

6. 在平面的一个右手直角坐标系中，证明当 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 时，变换 $(x',y')=(a_1x+b_1y+c_1,a_2x+b_2y+c_2)$ 是仿射变换，并求其逆变换.

7. 在平面的一个右手直角坐标系中，证明变换 $(x',y')=(x,y)\mathbf{A}+(x_0,y_0)$ 是正交变换，并求其逆变换，其中 $\mathbf{A}$ 是一个正交矩阵.

8. 在平面的一个右手直角坐标系中直线 l 的方程是 $ax+by+c=0$，求平面关于直线 l 的反射公式.

§22 仿射变换的决定定理

1. 仿射变换诱导的向量变换

定义 22.1 设 f 是平面的一个仿射变换，$\boldsymbol{a}$ 是平面上的一个向量，设 $\boldsymbol{a}$ 的起点和终点分别是 A,B，定义一个变换把向量 $\boldsymbol{a}$ 映为向量$\overrightarrow{f(A)f(B)}$，称为**仿射变换 f 诱导的向量变换**. 我们仍用 f 表示这个变换，即 $f(\boldsymbol{a})=\overrightarrow{f(A)f(B)}$，

平行移动向量 $\boldsymbol{a}$ 使之起点和终点分别是 C,D，由于 $AB/\!/CD,AC/\!/BD$，由推论 21.2 得，

$$f(A)f(B)/\!/f(C)f(D),f(A)f(C)/\!/f(B)f(D),$$

因此
$$\overrightarrow{f(C)f(D)}=\overrightarrow{f(A)f(B)}.$$

也就是说该定义与向量的起点和终点的选择无关，故定义是合理的.

定理 22.1 仿射变换决定的向量变换具有线性性质，即

(1) $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$；

(2) $f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a}),k\in\mathbf{R}$.

证 (1)把 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点. 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}$. 所以 $f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\overrightarrow{f(A)f(C)}=\overrightarrow{f(A)f(B)}+\overrightarrow{f(B)f(C)}=f(\boldsymbol{a})+f(\boldsymbol{b})$.

(2)由(1)知，对任何正整数 k，(2)成立. 另外，由(1)，取 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，知 $f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$. 取 $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{a}$，知 $f(-\boldsymbol{a})=-f(\boldsymbol{a})$，由此进一步知对于负整数 k，(2)也成立. 对于有理数 $k=\dfrac{n}{m}$，由于 $f(\boldsymbol{a})=f\left(m\cdot\dfrac{1}{m}\boldsymbol{a}\right)=mf\left(\dfrac{1}{m}\boldsymbol{a}\right)$，所以 $f\left(\dfrac{1}{m}\boldsymbol{a}\right)=\dfrac{1}{m}f(\boldsymbol{a})$. 故 $f\left(\dfrac{n}{m}\boldsymbol{a}\right)=nf\left(\dfrac{1}{m}\boldsymbol{a}\right)=\dfrac{n}{m}f(\boldsymbol{a})$. 即对任何有理数，(2)成立. 要证明对任意无理数，(2)也成立，需要下面的一个引理.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 及实数 k，由于仿射变换保持直线的平行性，因此 $f(k\boldsymbol{a})/\!/f(\boldsymbol{a})$. 故 $f(k\boldsymbol{a})=lf(\boldsymbol{a})$，这里 l 依赖于 k 和 $\boldsymbol{a}$. 我们要证明对任意实数 k，有$l=k$.

引理 22.1 (1)对于非零向量 $\boldsymbol{a}$ 及实数 k，如果 $f(k\boldsymbol{a})=lf(\boldsymbol{a})$，则对任意对于非零向量 $\boldsymbol{b}$，有 $f(k\boldsymbol{b})=lf(\boldsymbol{b})$，即 l 与向量 $\boldsymbol{a}$ 无关.

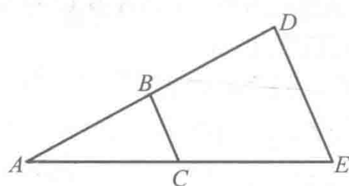
(2)对任何非零向量 $\boldsymbol{a}$，如果 $k>0$，则 $l>0$.

证 (1)如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b},\overrightarrow{AD}=k\boldsymbol{a},\overrightarrow{AE}=k\boldsymbol{b}$. 记 $A,B,C,$

D,E 在 f 下的象分别为 A',B',C',D',E'，见图 22-1. 由相似三角形的性质，$BC/\!/DE$，由于 f 保持直线的平行性，因此 $B'C'/\!/D'E'$. 由 $f(k\boldsymbol{a})=lf(\boldsymbol{a})$ 得 $|A'D'|:|A'B'|=l$，于是 $|A'E'|:|A'C'|=l$，即 $f(k\boldsymbol{b})=lf(\boldsymbol{b})$.

如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，先取一个与它们不共线的非零向量 $\boldsymbol{c}$，则有 $f(k\boldsymbol{c})=lf(\boldsymbol{c})$，再对 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 用结论(1)即可.

(2) 设 $k>0$，设 $f(\sqrt{k}\boldsymbol{a})=tf(\boldsymbol{a})$，对某个 t，由(1)，$f(k\boldsymbol{a})=f(\sqrt{k}(\sqrt{k}\boldsymbol{a}))=tf(\sqrt{k}\boldsymbol{a})=t^2f(\boldsymbol{a})$. 即 $l=t^2>0$. □



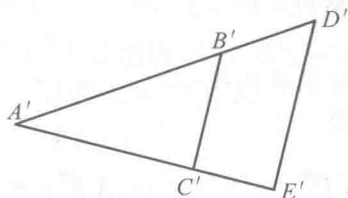


图　22-1

现在我们回到定理 22.1 中，证明对任意无理数 k，$f(k\boldsymbol{a})=kf(\boldsymbol{a})$，$k\in\mathbf{R}$. 设 $f(k\boldsymbol{a})=lf(\boldsymbol{a})$，并且 $l\neq k$，不妨设 $l<k$，取一个有理数 t，使得 $l<t<k$，则 $f((k-t)\boldsymbol{a})=f(k\boldsymbol{a})-f(t\boldsymbol{a})=lf(\boldsymbol{a})-tf(\boldsymbol{a})=(l-t)f(\boldsymbol{a})$. 但 $k-t>0$，$l-t<0$，这与以上引理中的(2)矛盾. □

定义 22.2　设 P_1,P_2,P 是共线的三点，点 P 内分或外分有向线段 $\overline{P_1P_2}$，设 $\overrightarrow{P_1P}=\lambda\overrightarrow{PP_2}$，$\lambda$ 称为共线三点 P_1,P_2,P 的**简单比**，记为 (P_1P_2P)，即 $(P_1P_2P)=\dfrac{P_1P}{PP_2}$.

推论 22.1　仿射变换保持共线三点的简单比不变.

推论 22.2　仿射变换把线段变成线段.

推论 22.3　仿射变换把三角形变成三角形，并且把顶点变成顶点，把边变成边，把内点变成内点.

2. 平面仿射变换的决定定理

定理 22.2（平面仿射变换的决定定理）　平面上不共线的三对对应点唯一决定一个仿射变换.

证　设 A,B,C 和 A',B',C' 是平面上不共线的三对点. 仿射变换 f 把 A 变成 A'，B 变成 B'，C 变成 C'. 对平面上任意一点 P，有 $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$，使得 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$. 若记 $f(P)=P'$，由于仿射变换保持向量的线性运算，故 $\overrightarrow{B'P'}=\lambda\overrightarrow{B'A'}+$

$\mu\overrightarrow{B'C'}$. 也就是 P' 是唯一确定的. 因此 f 由 A,B,C 和 A',B',C' 唯一确定. □

定理 22.3 平面仿射变换 f 是等距变换的必要充分条件是 f 保持平面上某个三角形的边长不变.

证 必要性是显然的.

充分性，设仿射变换 f 把平面上 $\triangle ABC$ 变成 $\triangle A'B'C'$，并且 $|AB|=|A'B'|$，$|AC|=|A'C'|$，$|BC|=|B'C'|$. 设 P_1,P_2 是平面上任意两个点，并且 $\overrightarrow{AP_i}=\lambda_i\overrightarrow{AB}+\mu_i\overrightarrow{AC}$，$i=1,2$. 记 $P_1'=f(P_1)$，$P_2'=f(P_2)$，由于仿射变换保持向量的线性运算，所以 $\overrightarrow{A'P_i'}=\lambda_i\overrightarrow{A'B'}+\mu_i\overrightarrow{A'C'}$，$i=1,2$. 显然 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等，故 $\angle BAC=\angle B'A'C'$，因此有 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'}$，从而

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{A'P_i'}|^2&=\lambda_i^2|\overrightarrow{A'B'}|^2+2\lambda_i\mu_i\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'}+\mu_i^2|\overrightarrow{A'C'}|^2\\&=\lambda_i^2|\overrightarrow{AB}|^2+2\lambda_i\mu_i\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\mu_i^2|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AP_i}|^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A'P_1'}\cdot\overrightarrow{A'P_2'}&=\lambda_1\lambda_2|\overrightarrow{A'B'}|^2+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{A'C'}+\mu_1\mu_2|\overrightarrow{A'C'}|^2\\&=\lambda_1\lambda_2|\overrightarrow{AB}|^2+(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\mu_1\mu_2|\overrightarrow{AC}|^2\\&=\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{P_1'P_2'}|^2&=(\overrightarrow{A'P_2'}-\overrightarrow{A'P_1'})^2\\&=|\overrightarrow{A'P_2'}|^2-2\overrightarrow{A'P_1'}\cdot\overrightarrow{A'P_2'}+|\overrightarrow{A'P_1'}|^2\\&=|\overrightarrow{AP_2}|^2-2\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{AP_2}+|\overrightarrow{AP_1}|^2=|\overrightarrow{P_1P_2}|^2.\end{aligned}$$

即 f 保持任意两点距离不变. □

习题二十二

1. 如果平面仿射变换 f 保持两点 A,B 不动，则它保持直线 AB 上的每一点不动.
2. 如果平面仿射变换 f 保持不共线三点 A,B,C 不动，则 f 是恒等变换.
3. 平面的映射 f 称为**相似变换**，如果存在正数 λ，使得对任意两点 A,B 都有 $|f(A)f(B)|=\lambda|AB|$，λ 称为 f 的**相似比**. 证明相似变换是仿射变换.
4. 证明平面上相似变换的全体构成平面的一个变换群.
5. 证明平面的仿射变换如果把半径为 r 的圆周变成半径为 r 的圆周，则它是一个等距变换.
6. 证明平面的仿射变换如果把圆周变成圆周，则它是一个相似变换.
7. 证明平面的仿射变换如果把三角形变成相似的三角形，则它是一个相似

变换.

8. 证明平面的仿射变换如果保持垂直关系,则它是一个相似变换.

9. 证明在任意仿射变换下,三角形的重心仍变成三角形的重心.

§23　仿射变换与等距变换在坐标系中的表示

1. 仿射变换在坐标系中的表示

定理 23.1　f 是平面仿射变换的必要充分条件是 f 在仿射坐标系$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$下的表达式可以写成 $(x',y')=(x,y)\boldsymbol{A}+(b_1,b_2)$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶可逆矩阵.

证　必要性. 任取一个仿射坐标系Ⅰ:$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$,对任意一点 $P(x,y)$,我们记它在 f 下的象为 $P'(x',y')$. 仿射坐标系Ⅰ在 f 下的象还是仿射坐标系,记为 f(Ⅰ):$\{O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'\}$. $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$,由于仿射变换保持线性关系,故$\overrightarrow{O'P'}=x\boldsymbol{e}_1'+y\boldsymbol{e}_2'$. 即 P'在仿射坐标系 f(Ⅰ)中的坐标是(x,y). 我们把从坐标系到坐标系 f(Ⅰ)的过渡矩阵记为 $\boldsymbol{A}$,则$(x,y)=(x',y')\boldsymbol{A}^{-1}+(c_1,c_2)$,其中$(c_1,c_2)$是Ⅰ的原点 O 在 f(Ⅰ)中的坐标. 故$(x',y')=(x,y)\boldsymbol{A}-(c_1,c_2)\boldsymbol{A}$,记$(b_1,b_2)=-(c_1,c_2)\boldsymbol{A}$即可.

充分性. 设$(x',y')=(x,y)\boldsymbol{A}+(b_1,b_2)$,其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶可逆矩阵. f 显然是一一对应并且把直线映为直线.

我们把以上矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**仿射变换 f 在坐标系$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$下对应的矩阵.**

容易验证若 f 在某坐标系下对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,g 在同一坐标系下对应的矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $g\cdot f$ 在该坐标系下对应的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$,f 的逆映射 f^{-1}在该坐标系下对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$(证明留作习题二十三第 1 题). □

例 1　在某坐标系中,仿射变换把 y 轴变成直线 $x'+y'+1=0$,x 轴变成直线 $x'-y'-1=0$,把点$(1,1)$变成$(0,0)$. 求这个仿射变换.

解　由于仿射变换把直线 $x=0$ 变成直线 $x'+y'+1=0$,把 $y=0$ 变成 $x'-y'-1=0$,故可设 $x=k(x'+y'+1)$,$y=l(x'-y'-1)$. 由$(x,y)=(1,1)$时$(x',y')=(0,0)$解出 $k=1$,$l=-1$. 所以仿射变换是 $\begin{cases}x=x'+y'+1\\ y=-x'+y'+1\end{cases}$ 或

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y \\ y'=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-1 \end{cases}.$$ □

一个自然的问题是：如果 f 在另一个仿射坐标系Ⅱ：$\{P;\boldsymbol{e}_1^*,\boldsymbol{e}_2^*\}$中对应的矩阵是 $\boldsymbol{A}^*$，那么 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{A}$ 有什么关系呢？

设坐标系Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$，则坐标系 f(Ⅰ)到 f(Ⅱ)的过渡矩阵也是 $\boldsymbol{T}$(证明留作习题二十三第 2 题).

从上一个定理的证明可以知道矩阵 $\boldsymbol{A}$ 实际上就是坐标系Ⅰ到 f(Ⅰ)的过渡矩阵，矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是坐标系Ⅱ到 f(Ⅱ)的过渡矩阵. 从而由坐标系Ⅰ经 f(Ⅰ)到坐标系 f(Ⅱ)的过渡矩阵是 $\boldsymbol{TA}$，由坐标系Ⅰ经Ⅱ到坐标系 f(Ⅱ)的过渡矩阵是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{T}$. 故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{T}=\boldsymbol{TA}$，即 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{TAT}^{-1}$. 因此我们有

定理 23.2 若仿射变换 f 在仿射坐标系Ⅰ下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，坐标系Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$，则 f 在仿射坐标系Ⅱ下的矩阵是 $\boldsymbol{TAT}^{-1}$.

推论 23.1 若仿射变换 f 在某仿射坐标系下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，则 $\det\boldsymbol{A}$ 和 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 只依赖于仿射变换 f，而与坐标系的选取无关.

我们把 $\det\boldsymbol{A}$ 和 $\operatorname{tr}\boldsymbol{A}$ 分别称为**仿射变换 f 的行列式和迹.**

定理 23.3(仿射变换的分解定理) 任意一个平面仿射变换可以分解为一个等距变换与沿两个互相垂直方向的压缩变换的乘积.

证 利用定理 23.1 容易验证任意仿射变换 f 把椭圆变成椭圆(见习题二十三第 9 题). 设 C 是平面上的单位圆周，则 $f(C)$是一个椭圆. 以 $f(C)$的中心为原点，长轴和短轴分别为 x,y 轴，建立直角坐标系，设 $f(C)$的长、短半轴分别为 a,b，定义变换 $g:(x,y)\mapsto\left(x,\frac{1}{b}y\right)$，$h:(x,y)\mapsto\left(\frac{1}{a}x,y\right)$，$g,h$ 分别是向 x 轴和 y 轴的压缩. 显然 $h\cdot g\cdot f$ 把单位圆映为单位圆，由习题二十二第 5 题，它是一个等距变换，记为 u，则 $f=g^{-1}\cdot h^{-1}\cdot u$. 注意 g^{-1},h^{-1}还是向 x 轴和 y 轴的压缩，故结论得证. □

2. 等距变换在坐标系中的表示

定理 23.4 f 是平面等距变换的必要充分条件是 f 在直角坐标系$\{O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$下的表达式可以写成$(x',y')=(x,y)\boldsymbol{A}+(b_1,b_2)$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是一个二阶正交矩阵.

证 必要性. 由于等距变换是仿射变换，因此 f 在一个直角坐标系$\{O;\boldsymbol{e}_1,$

$e_2\}$下的表达式可以写成$(x',y')=(x,y)\boldsymbol{A}+(b_1,b_2)$，其中$\boldsymbol{A}$是一个二阶可逆矩阵. 设$P(x,y)$是平面上任意一点，由于$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{f(O)f(P)}|$，我们有$(x,y)(x,y)^T=(x,y)\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T(x,y)^T$，由$(x,y)$的任意性，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T=I$.

充分性. 如果f在一个直角坐标系下的表达式可以写成$(x',y')=(x,y)\boldsymbol{A}+(b_1,b_2)$，其中$\boldsymbol{A}$是一个二阶正交矩阵，则容易验证$f$保持任意两点的距离不变.

一个二阶正交矩阵$\boldsymbol{A}$一定可以写成$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$或者$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$，其中前者的行列式等于1，后者的行列式等于$-1$.

前者表示一个绕原点的旋转变换，此时$(x',y')=(x,y)\boldsymbol{A}+(b_1,b_2)$表示一个旋转变换与一个平移变换的乘积(见第二十一节例2). 我们把旋转变换，平移变换以及它们的乘积统称为**刚体运动**或**保向等距变换**.

后者可以写成$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$，此时$(x',y')=(x,y)\boldsymbol{A}+(b_1,b_2)$表示一个关于$x$轴的反射和一个刚体运动的乘积. 我们把这种行列式等于-1的等距变换称为**反向等距变换**. □

综合以上的讨论我们知道

定理 23.5(等距变换的分解定理)　(1)任意一个保向等距变换(刚体运动)可以分解为一个旋转变换与一个平移变换的乘积.

(2)任意一个反向等距变换可以分解为一个关于某直线的反射和一个刚体运动的乘积.

例 2　求以直线$l: x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$为轴的轴反射变换.

解　设任一点$P(x,y)$的象为$P'(x',y')$，则P,P'是关于直线l的一对轴对称点，即线段PP'被直线l垂直平分. 这个条件可以分解为：

1° $PP'\perp l$.

2° PP'的中点M在l上(如图23-1). 由1°得

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

即　$$x'\sin\theta-y'\cos\theta=x\sin\theta-y\cos\theta.\qquad ①$$

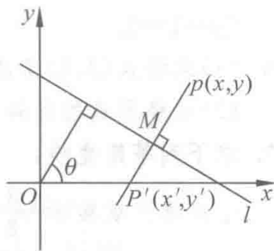


图　23-1

由2°得

$$\frac{x+x'}{2}\cos\theta+\frac{y+y'}{2}\sin\theta-p=0,$$

即 $$x'\cos\theta+y'\sin\theta=-x\cos\theta-y\sin\theta+2p. \qquad ②$$

由①,②两式解出 x',y',得

$$\begin{cases}x'=-x\cos 2\theta-y\sin 2\theta+2p\cos\theta,\\ y'=-x\sin 2\theta+y\cos 2\theta+2p\sin\theta.\end{cases}$$

这就是所求的关于直线 l 的轴反射变换式. □

习题二十三

1. 设仿射变换 f,g 在某坐标系下对应的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,证明 $g\cdot f$ 在该坐标系下对应的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$, f 的逆映射 f^{-1} 在该坐标系下对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

2. 设 f 是仿射变换,坐标系Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵为 $\boldsymbol{T}$,记 f(Ⅰ)和 f(Ⅱ)为Ⅰ和Ⅱ在 f 下的象,证明 f(Ⅰ)到 f(Ⅱ)的过渡矩阵也是 $\boldsymbol{T}$.

3. 已知仿射变换

$$\begin{cases}x'=2x-3y+5,\\ y'=x+3y-7,\end{cases}$$

点 $O(0,0)$,$A(3,2)$,$B(1,-4)$及直线 l:$3x-y+4=0$. 试求:

①点 O,A,B 的象点;

②点 O,A,B 的逆象点;

③直线 l 的象;

④直线 l 的逆象.

4. 求使三点$(0,0)$,$(1,1)$,$(1,-1)$变到三点$(2,3)$,$(2,5)$,$(3,-7)$的仿射变换.

5. 求仿射变换,使 $x=0,y=0,x+2y-1=0$ 分别变成 $x+y=0,x-y=0,x+2y-1=0$.

6. (1)求将点$(2,3)$变成点$(0,-1)$的平移变换;

(2)求绕原点的旋转,使点$(3,1)$变成点$(-1,3)$.

7. 求下列等距变换:

①绕原点旋转 $\theta=\dfrac{3}{2}\pi$,再按向量$(2,-1)$平移;

②绕原点旋转 $\theta=-\dfrac{3}{4}\pi$,又要使点$(0,-1)$变为点$(-2+\sqrt{2},-1-\sqrt{2})$.

8. 求以下列直线为轴的反射变换:

①$y=c$(c 是常数);

②$y=x$;

③$ax+by+c=0\quad(a^2+b^2\neq 0)$.

9. 证明仿射变换一定把椭圆变成椭圆，把双曲线变成双曲线，把抛物线变成抛物线.

§24　仿射变换的其他性质

1. 仿射变换的面积系数

定理 24.1　平面上两个封闭图形的面积之比，在仿射变换下保持不变.

证　因为平面图形的面积可以用平行四边形面积之和来逼近，而每个平行四边形又可分为两个三角形，因此只需证明任意两个三角形面积之比，在仿射变换下保持不变. 我们在笛氏直角坐标系下来证明.

设$\triangle P_1P_2P_3$的各顶点P_i的坐标为$(x_i,\ y_i)$，$i=1,2,3$，则$\triangle P_1P_2P_3$的面积为

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值.}$$

由定理 23.1，经仿射变换后，$\triangle P_1P_2P_3$变成为$\triangle P_1'P_2'P_3'$. 设P_i'的坐标为$(x_i',\ y_i')$，$i=1,2,3$，则有

$$\begin{cases} x_i'=a_{11}x_i+a_{21}y_i+b_1,\\ y_i'=a_{12}x_i+a_{22}y_i+b_2.\end{cases}$$

于是$\triangle P_1'P_2'P_3'$的面积为

$$\begin{aligned}S_{\triangle P_1'P_2'P_3'}&=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1\\ x_2' & y_2' & 1\\ x_3' & y_3' & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}\\ &=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{21}y_1+b_1 & a_{12}x_1+a_{22}y_1+b_2 & 1\\ a_{11}x_2+a_{21}y_2+b_1 & a_{12}x_2+a_{22}y_2+b_2 & 1\\ a_{11}x_3+a_{21}y_3+b_1 & a_{12}x_3+a_{22}y_3+b_2 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}\\ &=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ b_1 & b_2 & 1\end{vmatrix}\text{的绝对值}\end{aligned}$$

$$=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|S_{\triangle P_1P_2P_3}.$$

所以

$$\frac{S_{\triangle P_1'P_2'P_3'}}{S_{\triangle P_1P_2P_3}}=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|.$$

等式右端是一个常数，即仿射变换的系数行列式的绝对值，它与三角形无关，是由仿射变换完全决定的. 因此对于另一个$\triangle Q_1Q_2Q_3$与它的象$\triangle Q_1'Q_2'Q_3'$的面积比也有

$$\frac{S_{\triangle Q_1'Q_2'Q_3'}}{S_{\triangle Q_1Q_2Q_3}}=|a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}|.$$

所以得

$$\frac{S_{\triangle P_1P_2P_3}}{S_{\triangle Q_1Q_2Q_3}}=\frac{S_{\triangle P_1'P_2'P_3'}}{S_{\triangle Q_1'Q_2'Q_3'}}.$$ □

推论 24.1 在一个仿射变换下，任意一个封闭图形变换后的面积S'与变换前的面积S之比是一个常数. 即仿射变换的行列式的绝对值. 我们把这个常数称为**仿射变换的面积系数**.

证 由定理 24.1，在一个直角坐标系下，这个比值是系数矩阵的行列式的绝对值，再由推论 23.1，该行列式只与仿射变换有关而与坐标系的选取无关. □

2. 仿射变换的不动点和不变直线

在给定仿射变换下，若一个点和它的象点重合，则称该点为给定**仿射变换的不动点**；若一条直线和它的象直线重合，则称该直线为给定**仿射变换的不变直线**. 注意，并不要求不变直线上的每一点都是不动点.

例 1 求仿射变换

$$\begin{cases}x'=2x+2y-1,\\ y'=-\dfrac{3}{2}x-2y+\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

的不动点和不变直线.

解 设不动点为(x,y)，则(x,y)的象点(x',y')仍为(x,y). 于是x,y是下列方程组的解：

$$\begin{cases}x=2x+2y-1,\\ y=-\dfrac{3}{2}x-2y+\dfrac{3}{2},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x+2y-1=0, \\ -\frac{3}{2}x-3y+\frac{3}{2}=0. \end{cases}$$

所有适合方程 $x+2y-1=0$ 的 x,y 都是上述方程组的解.故所给仿射变换有无穷多个不动点,它们组成一条直线 $x+2y-1=0$.或者说直线 $x+2y-1=0$ 上的每一点都是不动点(直线 $x+2y-1=0$ 当然是一条不变直线,但还可能有其他不变直线).

设不变直线为 $Ax+By+C=0$,于是它的象直线仍为 $Ax'+By'+C=0$,也就是直线 $Ax'+By'+C=0$ 的逆象是 $Ax+By+C=0$.即

$$A(2x+2y-1)+B(-\frac{3}{2}x-2y+\frac{3}{2})+C=0$$

与
$$Ax+By+C=0$$

表示同一条直线,于是有

$$\frac{2A-\frac{3}{2}B}{A}=\frac{2A-2B}{B}=\frac{-A+\frac{3}{2}B+C}{C}.$$

分别由第一个等号和第二个等号得到

$$2AB-\frac{3}{2}B^2=2A^2-2AB,$$

即
$$2A^2-4AB+\frac{3}{2}B^2=0, \quad ①$$

$$2AC-2BC=-AB+\frac{3}{2}B^2+BC,$$

即
$$\frac{3}{2}B^2-AB+3BC-2AC=0. \quad ②$$

由①解得 $A=\frac{3}{2}B$,或 $A=\frac{1}{2}B$.

将 $A=\frac{3}{2}B$ 代入②,得 $\frac{3}{2}B^2-\frac{3}{2}B^2+3BC-3BC=0$,即 B,C 任意.

将 $A=\frac{1}{2}B$ 代入②,得 $B=0$,C 任意(此时 A 亦为零,舍去),或 $C=-\frac{1}{2}B$.

由 $A=\frac{3}{2}B$ 及 B,C 任意,得不变直线

$$\frac{3}{2}Bx+By+C=0,$$

可以化成
$$3x+2y+\lambda=0.\ (\lambda \text{ 是参数})$$

由 $A=\frac{1}{2}B, C=-\frac{1}{2}B$，得另一条不变直线

$$\frac{1}{2}Bx+By-\frac{1}{2}B=0,$$

可以化成 $$x+2y-1=0.$$ □

3. 二次曲线的仿射等价

我们在笛氏直角坐标系中讨论，二次曲线（即坐标满足二次方程的点的轨迹）在仿射变换下的象，仍是二次曲线.

如果两个图形，能够经过仿射变换，从一个变成另一个，我们就称它们是**仿射等价**的. 不难证明：所有的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 都与单位圆 $x^2+y^2=1$ 仿射等价；所有的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 都与等轴双曲线 $x^2-y^2=1$ 仿射等价；所有的抛物线 $y^2=2px$ 都与抛物线 $y^2=2x$ 仿射等价；所有的相交（实）直线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 都与 $x^2-y^2=0$ 仿射等价.

习题二十四

1. 求仿射变换，使直线 $x+2y-1=0$ 上每一点皆为不动点，且使 $(1,-1)$ 变为 $(-1,2)$.
2. 求下列仿射变换的不动点及不变直线：

   ① $\begin{cases} x'=7x-y+1, \\ y'=4x+2y+4; \end{cases}$

   ② $\begin{cases} x'=2x+y+1, \\ y'=-x-1. \end{cases}$
3. 已知仿射变换

   $$\begin{cases} x'=3x+4y-12, \\ y'=4x-3y+6, \end{cases}$$

   求直线 $7x-2y-24=0$ 上的点，使该点经过上述变换后的象仍在这条直线上.
4. 已知仿射变换

$$\begin{cases}x'=2x+y-2,\\y'=x-y-1\end{cases}$$

及点 $A(1,1)$，试求过 A 点的直线，使其象仍过 A 点.

5. 试拟出三个仿射变换的代数表示式，使它们分别有一个不动点，有无穷多个不动点组成一条直线及没有不动点(要求所拟仿射变换尽可能地简单).

6. 在直角坐标系中，问下列各曲线经过给出的仿射变换后，变成何种图形？

①$x^2-y^2=4$，经过仿射变换$\begin{cases}x'=2x-y,\\y'=x-2y+1;\end{cases}$

②$x^2-2y+1=0$，经过仿射变换$\begin{cases}x'=x+2,\\y'=3x-y-1;\end{cases}$

③$x^2+y^2=1$，经过仿射变换$\begin{cases}x'=3x+1,\\y'=4y-2.\end{cases}$

7. 证明椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 仿射等价；双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与等轴双曲线 $x^2-y^2=1$ 仿射等价；抛物线 $y^2=2px$ 与抛物线 $y^2=2x$ 等价；相交直线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 与 $x^2-y^2=0$ 仿射等价.

§ 25　仿射坐标系及图形仿射性质的应用

1. 仿射坐标系的应用举例

由于平面仿射坐标系不要求二坐标轴互相垂直，也不要求两个轴上的长度单位相等，与笛氏直角坐标系相比，要求大大地放宽了，这就给建立仿射坐标系带来很大方便.

我们先列出在仿射坐标系中与在笛氏直角坐标系中相同的一些表示式.

(1)定比分点公式

P 是线段$\overline{P_1P_2}$ 上一点，且$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda(\neq-1)$，已知 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，则分点 P 的坐标(x,y)为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

(2)直线方程

过 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 的直线方程(两点式)为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

特别地,当 $P_1P_2 /\!/ y$ 轴(即 $x_2=x_1$)时,直线方程为

$$x=x_1.$$

当 $P_1P_2 /\!/ x$ 轴(即 $y_2=y_1$)时,直线方程为

$$y=y_1.$$

过点 $A(a,0)$,$B(0,b)$ 的直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

一般地,直线方程为一次方程

$$Ax+By+C=0,$$

反之,一次方程必表示直线.

(3)已知二直线 $l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$,$l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$,则

$$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}.$$

(4)三角形的面积公式

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$C(x_3,y_3)$,则 $\triangle ABC$ 的面积是

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的绝对值个面积单位.

由此可得三点 A,B,C 共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

注 1 如图 25-1,设 O 为坐标原点,D 和 F 分别为 x 轴和 y 轴上的单位点,以 OD 和 OF 为邻边的 $\square ODEF$ 的面积为该仿射坐标系中的面积单位,例如图中 $\square OGBH$ 的面积就是 x_2y_2 个面积单位.

注 2 和直角坐标系中一样,A,B,C 的顺序是逆时针方向时,上述三阶行列式的值为正,顺时针方向时则为负.

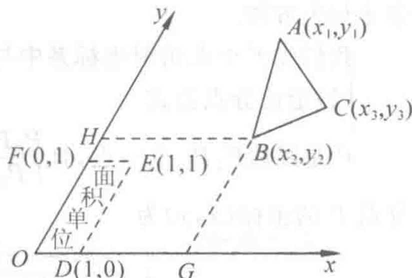


图 25-1

仿射坐标系中的公式也有和直角坐标系中不同的，例如直角坐标系中两点间的距离公式及点到直线的距离公式在仿射坐标系中就不再适用.

由上可知，一般在证明有关平行、共线点、共点线、平行线段的比、图形面积的比等仿射性质的问题时，选用仿射坐标系要方便得多，但在与距离和角度有关的问题中，仿射坐标系不如直角坐标系方便.

例 1　$\angle A$ 是一个固定角，B，C 分别在 $\angle A$ 的两边上变动，使 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$ 为定值，求证 BC 通过一个定点.

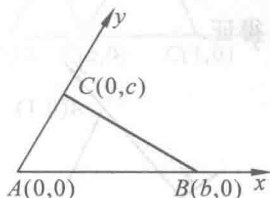


图　25-2

分析　当 B，C 两点在角的两边上变动时，直线 BC 的方程也跟着变化，因此如能使 B，C 两点的坐标简单，则 BC 的方程也就简单. 于是想到取角的两边为二坐标轴，建立仿射坐标系，如图 25-2. 于是有 $A(0,0)$，设 $B(b,0)$，$C(0,c)$，则 BC 的方程为

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{c}=1. \qquad ①$$

由题设 $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=m$（定值）得

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=m. \qquad ②$$

比较①和②，得 $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)$ 满足方程(1)，即 BC 通过定点 $\left(\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)$. □

例 2　已知线段 AB 的中点 M，从 AB 上另一点 C 向 AB 的一侧作线段 CD，令 CD 的中点为 N，AD 的中点为 P，MN 的中点为 Q. 求证 PQ 平分 BC.（1978 年全国数学联赛试题）

分析　本题只涉及若干线段的中点，因此原始点的坐标设得越简单，计算就越方便. 于是想到建立仿射坐标系.

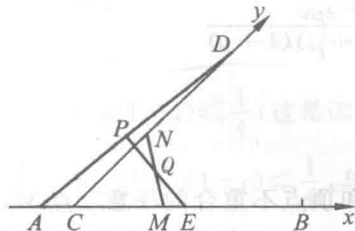


图　25-3

证　以 C 为原点，CB 为 x 轴，CD 为 y 轴建立仿射坐标系（如图 25-3）. 于是 $C(0,0)$. 设点 $A(a,0)$，$B(b,0)$，$D(0,d)$，由中点公式得 $M\left(\frac{a+b}{2},0\right)$，$P\left(\frac{a}{2},\frac{d}{2}\right)$，$N\left(0,\frac{d}{2}\right)$，$Q\left(\frac{a+b}{4},\frac{d}{4}\right)$.

设 CB 的中点为 E，则 E 为 $\left(\frac{b}{2},0\right)$. 要证 PQ 平分 CB，只需证 P，Q，E 三点共线，由

$$\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & \frac{d}{2} & 1 \\ \frac{a+b}{4} & \frac{d}{4} & 1 \\ \frac{b}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

得证. □

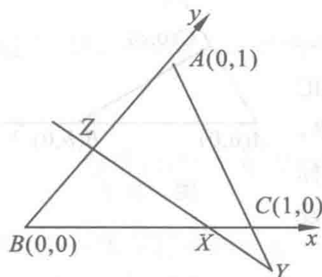


图 25-4

例 3 梅尼劳斯(Menelaus)定理 设 X,Y,Z 分别是$\triangle ABC$三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点,则 X,Y,Z 三点共线的充要条件为

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1. \tag{25.1}$$

分析 为了便于运用定比分点公式,先将条件(25.1)改用定比分点的形式表示.

记$\frac{BX}{XC}=\lambda,\frac{CY}{YA}=\mu,\frac{AZ}{ZB}=\nu$,于是条件(25.1)变成

$$\lambda\mu\nu=-1 \text{ 或 } 1+\lambda\mu\nu=0.$$

本题只涉及定比分点及三点共线,因此若原始点的坐标设得越简单,计算就越方便,于是想到建立仿射坐标系.

证 以 B 为原点,BC 为 x 轴,BA 为 y 轴,C 为 x 轴上的单位点,A 为 y 轴上的单位点建立仿射坐标系(如图 25-4). 于是有$B(0,0)$,$C(1,0)$,$A(0,1)$. 由定比分点公式得 $X\left(\frac{\lambda}{1+\lambda},0\right)$,$Y\left(\frac{1}{1+\mu},\frac{\mu}{1+\mu}\right)$,$Z\left(0,\frac{1}{1+\nu}\right)$. 由

$$\begin{vmatrix} \frac{\lambda}{1+\lambda} & 0 & 1 \\ \frac{1}{1+\mu} & \frac{\mu}{1+\mu} & 1 \\ 0 & \frac{1}{1+\nu} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1+\lambda\mu\nu}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\nu)}$$

得 X,Y,Z 三点共线$\Leftrightarrow 1+\lambda\mu\nu=0$. □

例 4 在$\triangle ABC$三边 AB,BC,CA 上分别有和顶点不重合的任意三点 M,K 和 L. 试证$\triangle AML$,$\triangle MBK$,$\triangle KCL$ 中至少有一个三角形的面积不大于$\triangle ABC$面积的$\frac{1}{4}$.(第 8 届国际中学生数学竞赛题)

分析　这是一个关于多个三角形面积比的问题，因此若诸顶点的坐标设得越简单，计算起来越方便. 于是想到建立仿射坐标系.

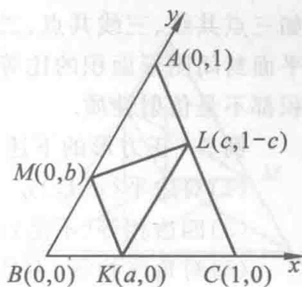


图　25-5

证　以 B 为原点，C 和 A 分别是 x 轴和 y 轴上的单位点，建立仿射坐标系（如图 25-5）. 于是有 $B(0,0)$，$C(1,0)$，$A(0,1)$. 设 $K(a,0)$，$M(0,b)$，$L(c,1-c)$（因为 $L(x,y)$ 在 AC：$x+y=1$ 上，所以设 $x=c$，则 $y=1-c$），这里 $0<a,b,c<1$.

$\triangle ABC$ 的面积仍记为$\triangle ABC$. 由三角形面积公式得

$$\triangle AML=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\0 & b & 1\\c & 1-c & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}c(1-b),$$

$$\triangle MBK=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & b & 1\\0 & 0 & 1\\a & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}ab,$$

$$\triangle KCL=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}a & 0 & 1\\1 & 0 & 1\\c & 1-c & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}(1-a)(1-c),$$

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}.$$

假设前三个三角形的面积都大于$\frac{1}{4}\triangle ABC$，则有

$$\triangle AML\cdot\triangle MBK\cdot\triangle KCL>\left(\frac{1}{4}\triangle ABC\right)^3,$$

即

$$abc(1-a)(1-b)(1-c)>\left(\frac{1}{4}\right)^3. \tag{$*$}$$

但 $a(1-a)\leqslant\frac{1}{4}$（这是因为 $a^2-a+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$，故 $a-a^2\leqslant\frac{1}{4}$），同理 $b(1-b)\leqslant\frac{1}{4}$，$c(1-c)\leqslant\frac{1}{4}$，与（$*$）矛盾，命题得证. □

2. 图形的仿射性质在初等几何中的应用

我们把图形经过仿射变换保持不变的性质和量，称为图形的**仿射性质**. 例

如三点共线、三线共点、二直线平行、共线三点的简单比、二平行线段的比、两个平面封闭图形面积的比等都是图形的仿射性质，而线段的长度、角度、图形的面积都不是仿射性质.

例 5 正方形的下述性质中哪些性质是仿射性质？

(1)对边平行(是)；　　(2)四角相等(不是)；

(3)四边相等(不是)；　　(4)对角线互相平分(是)；

(5)对角线相等(不是)；　　(6)角被对角线平分(不是)；

(7)对角线把正方形面积四等分(是)；

(8)对边相等(是)；　　(9)对角线互相垂直(不是). □

如果一个特殊图形具有某个仿射性质，则由该图形经过任意仿射变换所得到的图形，也一定具有这个性质. 因此对于一个只涉及某个一般图形的仿射性质的命题，我们可以通过仿射变换，将一般图形变成一个特殊图形，只要对于这个特殊图形证明命题成立，则对于原来的一般图形命题也必定成立. 而对于特殊图形证明命题成立，往往要容易得多.

我们又知道，任意三角形和任意平行四边形都可以经过仿射变换，把它们分别变成正三角形和正方形，任意梯形可以变成等腰梯形. 因此初等几何中关于任意三角形、平行四边形和梯形的命题，只要这个命题所涉及的全部是仿射性质，那么我们就可以将它们化成正三角形(或其他特殊三角形)、正方形及等腰梯形的相应的命题来解决.

例 6 在$\triangle ABC$三边BC,CA,AB上顺次取三点L,M,N，使

$$\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}=\frac{AN}{NB}.$$

试证$\triangle ABC$与$\triangle LMN$有相同的重心.

分析 因为三角形的重心和共线三点的简单比是仿射性质，所以我们只要对正三角形ABC证明上述命题就行了. 相应的命题为：

已知$AB=BC=CA$(如图 25-6)，$\frac{BL}{LC}=\frac{CM}{MA}=\frac{AN}{NB}$. 则$\triangle ABC$与$\triangle LMN$重心相同.

证 由已知条件得$AN=BL=CM$，$AM=BN=CL$，又因为$\angle A=\angle B=\angle C$，所以$\triangle ANM\cong\triangle BLN\cong\triangle CML$，于是有$MN=NL=LM$，即$\triangle LMN$亦为正三角形.

设O为正三角形ABC的重心，故O亦为外心，于是有$OA=OB=OC$. 又O亦为内心，故$\angle NAO=\angle LBO=\angle MCO$，所以$\triangle ONA\cong\triangle OLB\cong\triangle OMC$，于是$ON=OL=OM$，即$O$为正三角形$LMN$的外心亦为重心. □

例 7　试证对于平面上任一椭圆,都存在一个仿射变换,可将它变成圆.

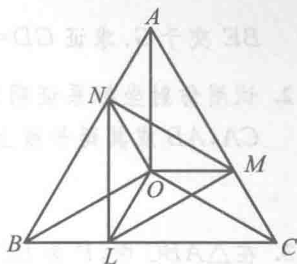


图　25-6

证　我们在笛氏直角坐标系中来研究这个问题,建立一合适的坐标系,使已知椭圆具有标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

即

$$x^2+\frac{a^2}{b^2}y^2=a^2. \quad ①$$

只要取仿射变换

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=\dfrac{a}{b}y, \end{cases} \quad ②$$

就可将①变成圆

$$x'^2+y'^2=a^2. \quad \square$$

这样,对于有关椭圆的仿射性质的命题,都可以转到对圆的有关情形来解决.下面我们用仿射性质来求椭圆的面积.

例 8　求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的面积.

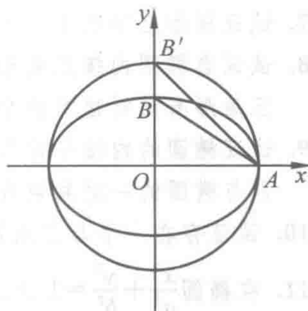


图　25-7

解　已知椭圆经过仿射变换(上例中的②)变成半径为 a 的圆.椭圆的中心 $O(0,0)$ 及相邻二顶点 $A(a,0)$,$B(0,b)$ 在该仿射变换下的象分别为 $O(0,0)$,$A(a,0)$,$B'(0,a)$(如图 25-7).由于仿射变换保持两图形面积之比不变,于是有

$$\frac{S_{椭圆}}{S_{\triangle OAB}}=\frac{S_{圆}}{S_{\triangle OAB'}},$$

即

$$\frac{S_{椭圆}}{\frac{1}{2}ab}=\frac{\pi a^2}{\frac{1}{2}a^2},$$

得

$$S_{椭圆}=\pi ab. \quad \square$$

习题二十五

1. 在$\triangle ABC$中,D,E分别在边BC及CA上,$BD=\frac{1}{3}BC$,$CE=\frac{1}{3}CA$,AD与

BE 交于 G. 求证 $GD=\frac{1}{7}AD, GE=\frac{4}{7}BE$.

2. 试用仿射坐标系证明塞瓦(Ceva)定理:设 P,Q,R 分别是 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 或其延长线上的点,则 AP, BQ, CR 三线共点的充要条件为

$$\frac{PB}{PC}\cdot\frac{QC}{QA}\cdot\frac{RA}{RB}=-1.$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中,P 为 BC 边上任意一点,$PE /\!/ BA$, $PF /\!/ CA$,若 $S_{\triangle ABC}=1$,证明 $S_{\triangle BPF}$, $S_{\triangle PCE}$, $S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于 $\frac{4}{9}$.(1984 年全国中学生数学竞赛题)

4. 判断下列哪些是仿射性质,并说明理由.

(1)线段中点;(2)点的轴对称点;(3)点的中心对称点;(4)三角形的重心;(5)三角形的垂心;(6)三角形的内心;(7)不成位似的二相似三角形.

5. 在仿射变换下菱形的哪些性质保持不变,哪些性质可能改变?

6. 将三角形每边三等分,然后将分点与对顶相连,相交得一六角形,试证这个六角形的三条对角线共点.

7. 试证梯形上下底中点的连线与两腰所在直线共点.

8. 试证自椭圆内接三角形的顶点作椭圆的切线,又得外切三角形,如果这两个三角形有两对边对应平行,则第三对边亦平行.

9. 试证椭圆的内接平行四边形的对角线交点必为椭圆的中心,且它的二邻边分别与椭圆的一对共轭直径平行.

10. 试证存在一个与三角形三边都在中点相切的椭圆.

11. 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上取两点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$,过中心 O 作直线平分扇形 P_1OP_2 的面积,求此直线的斜率.

部分习题答案

习 题 一

1. $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,

$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\overrightarrow{DA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

2. $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(4\boldsymbol{l}-2\boldsymbol{k}),\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{l}-4\boldsymbol{k})$.

7. $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)$.

17. $\boldsymbol{c}=\lambda(|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b})\quad(\lambda\neq 0)$.

习 题 二

4. 20.

5. $-19,\arccos\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)$.

6. $-\frac{29}{2}$.

7. $\pm\frac{3}{5}$.

习 题 三

3. 等式成立的充要条件为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

4. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

6. $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，k 任意；$\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$ 时，$k=\pm 1$.

习 题 四

5. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$ 或 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

11. 等式成立的充要条件为：①$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}$，或②$\boldsymbol{a}\not\perp\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$.

12. 等式成立的充要条件为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两互相垂直.

16. $3(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

习 题 五

6. $(3,22,-1)$和$(37,36,35)$.

7. $(-1,-3,3)$.

8. $(3,4,4)$.

9. $\sqrt{149}$及$\frac{1}{2}\sqrt{461}$.

10. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=11, |\boldsymbol{a}|=\sqrt{70}, |\boldsymbol{b}|=\sqrt{14}$,

 $\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\arccos\left(\frac{11\sqrt{5}}{70}\right)$.

11. $(6,-3,-3)$和$3\sqrt{6}$.

12. ①$(-2,-1,-2)$和$(2,1,2)$； ②$(16,4,16)$；

 ③-2和-2； ④$(3,4,-5)$和$(-1,2,-1)$.

13. $\left(10,0,\frac{13}{5}\right)$.

14. ①不共面； ②共面，$\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$； ③共面，不能.

16. $\frac{59}{6}$.

17. 4.

18. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}$； $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}}$； $\cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{14}}$.

习 题 六

2. $a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0$.

3. ① $x-a=0$； ② $cy-bz=0$.

4. ① $(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-x_2y_1=0$；

 ② $(z_1-z_2)x-(x_1-x_2)z+x_1z_2-x_2z_1=0$.

5. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=1$.

6. $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ x_1-a & y_1 & z_1 \\ x_2-a & y_2 & z_2 \end{vmatrix}=0$.

7. $x+y-1=0$.

8. $5x-2y+z-5=0$.

9. $2x-6y+z-1=0$.

10. $\frac{1}{6}\left|\frac{d^3}{abc}\right|$.

11. $(x_2-x_1)\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+(y_2-y_1)\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+$

$(z_2-z_1)\left(z-\frac{z_1-z_2}{2}\right)=0.$

习 题 七

1. ① $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-3}$； ② $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{0}$；

③ $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{5}$.

2. ① $x=y=z$；

② 平行于 x 轴的直线$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{0}$.

3. ① $\frac{x}{-4}=\frac{y-\frac{5}{4}}{1}=\frac{z-\frac{7}{4}}{3}$； ② $\frac{x+5}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$.

4. ①$\perp$； ②$/\!/$.

5. 6.

6. $D=3$.

7. $B=-6, D=-27$.

9. ①$D_1=D_2=0$； ②$A_1=A_2=0$，D_1，D_2 不全为零；

③$\frac{B_1}{B_2}=\frac{D_1}{D_2}$，$B_1$，$B_2$ 都不为零；

④$C_1=C_2=D_1=D_2=0$.

习 题 八

1. 垂直于 xy 面的平面：$x-6y+8=0$；

垂直于 yz 面的平面：$5y-z-9=0$；

垂直于 zx 面的平面：$5x-6z-14=0$.

2. $x-2y-1=0$.

3. $7x-2y-2z+1=0$.

4. ①$\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-3}{3}$； ②$\frac{x-1}{-4}=\frac{y}{50}=\frac{z+2}{31}$；

③$\frac{x-11}{6}=\frac{y-9}{8}=\frac{z}{-1}$.

5. ①异面； ②共面，不垂直，不平行；

③共面，垂直； ④共面，平行.

6. $y-z=0$； $x+y+z=0$.

8. 记 $P_0(a,b,c)$，$P_1(a_1,b_1,c_1)$，$P_2(a_2,b_2,c_2)$，$\boldsymbol{S}_1=(l_1,m_1,n_1)$，$\boldsymbol{S}_2=(l_2,m_2,n_2)$.

① $\begin{cases}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{S}_1)=0,\\(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{S}_2)=0;\end{cases}$

② $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_0+t(\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2)$.

9. 相交 $\Leftrightarrow Am+Bn+C\neq 0$；

平行 $\Leftrightarrow Am+Bn+C=0, Aa+Bb+D\neq 0$；

重合 $\Leftrightarrow Am+Bn+C=0, Aa+Bb+D=0$.

10. $l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$；

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

11. $\begin{vmatrix}x-a & y-b & z-c\\ A & B & C\\ l & m & n\end{vmatrix}=0$.

15. $|A|=|B|$ 以及 $|A|=|B|=|C|$.

16. $\arcsin\left(\frac{3}{133}\right)$.

17. $x-z+2=0$ 及 $x+20y+7z-6=0$.

习 题 九

1. ① $\frac{1}{\sqrt{14}}(x-2y+3z-1)=0$，$\boldsymbol{n}^0$ 在Ⅳ卦限；

② $\frac{1}{-3}(x-2y-2z)=0$，$\boldsymbol{n}^0$ 在Ⅱ卦限.

2. ① $\frac{\sqrt{38}}{19}$； ② $\sqrt{2}$； ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

3. ①同侧； ②异侧； ③不在； ④在.

4. $\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

5. $Ax+By+Cz+\frac{D_1+2D_2}{3}=0$，$Ax+By+Cz+\frac{2D_1+D_2}{3}=0$.

6. $\left(0,-\frac{4}{3},0\right)$ 及 $(0,-8,0)$.

7. $4x-2y+20z+9=0$ 及 $32x-16y-8z-33=0$，第一个平分面位于原点所在的二面角内.

10. ① $\sqrt{5}$； ② $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

11. $\frac{11}{6}\sqrt{6}$.

12. ①$4\sqrt{2}$,公垂线$\begin{cases}2x+y+2z-6=0,\\ x-4y+z-17=0;\end{cases}$

②$\frac{2}{5}\sqrt{2}$,公垂线$\begin{cases}7x-5y-z-14=0,\\ 27x-5y+14z+10=0.\end{cases}$

习题十

1. ①中心$(1,-2,3)$,半径 6;

②中心$(-4,0,0)$,半径 4.

2. ①$x^2+(y-4)^2+(z+1)^2=21$;

②$x^2+y^2+z^2-\frac{7}{2}x-2y-\frac{3}{2}z=0$;

③$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9$ 及

$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25$;

④$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=z_0^2$;

⑤$x^2+y^2+z^2-8z-5=0$.

3. $2x+2y+z-9=0$.

4. 中心$\left(\frac{-AD}{A^2+B^2+C^2},\frac{-BD}{A^2+B^2+C^2},\frac{-CD}{A^2+B^2+C^2}\right)$;

半径$\sqrt{R^2-\frac{D^2}{A^2+B^2+C^2}}$.

5. 记两球心的距离 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$,

则外离$\Leftrightarrow d>R_1+R_2$;

外切$\Leftrightarrow d=R_1+R_2$;

相交$\Leftrightarrow R_1+R_2>d>|R_1-R_2|$;

内切$\Leftrightarrow d=|R_1-R_2|$;

内含$\Leftrightarrow d<|R_1-R_2|$.

6. $(x-R)^2+(y-R)^2+(z-R)^2=R^2$($R$ 为参数),

球心轨迹为 $x=y=z$.

7. $13x^2+10y^2+5z^2-4xy-6xz-12yz-56=0$.

8. $13x^2+10y^2+5z^2-4xy-6xz-12yz-5=0$.

9. $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx-3=0$.

10. $11x^2+11y^2+23z^2-32xy+16xz+16yz-6x-60y-186z+342=0$.

11. $xy+yz+zx=0$.

12. $51x^2+51y^2+12z^2+104xy+52xz+52yz-518x-516y-252z+1279=0$.

13. 二平行平面 $Ax+By+Cz+D\pm d\sqrt{A^2+B^2+C^2}=0$.

14. $[A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)]^2$

$=\sin^2\alpha(A^2+B^2+C^2)[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]$.

习 题 十 一

1. $x^2-y^2-z^2=0$.

2. ①$y^2=2z$； ②$xy+xz-yz-z^2=4$；

③$4x^2+25y^2+z^2+4xy-20x-10z=0$.

3. $\left(x-\dfrac{z}{n}\right)^2+\left(y-\dfrac{mz}{n}\right)^2=a^2$.

4. ①对于 xy 面：$2x^2+5y^2=25$，

对于 yz 面：$3y^2-2z^2=-25$，

对于 zx 面：$3x^2+5z^2=100$；

②$4x^2+\dfrac{1}{2}y^2-4=0$，

$4z=12-\dfrac{1}{2}y^2$，

$z=x^2+2$.

5. ①$ky^2-2pzx=0$；

②$x^2+z^2-z(y+a)=0$；

③$(3x+4z)^2+25y^2=25(z+3)^2$.

6. $15x^2-9y^2-10z^2-10xy=0$.

7. ①$y-\dfrac{m}{n}z=\left(x-\dfrac{l}{n}z\right)^3$；

②$(bz-cy)(z-c)^2=(az-cx)^3$.

8. ①$4x^2+9(y^2+z^2)=36$；

②$y^4=4p^2(x^2+z^2)$；

③$(x^2+y^2+z^2+3)^2=16(x^2+z^2)$；

④$x^2(y^2+z^2)^2=a^4$，$y^2(x^2+z^2)=a^4$；

⑤$9x^2+9y^2-10z^2-6z-9=0$；

⑥$x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{49}(2x+y-2z-9)^2+\dfrac{18}{49}(2x+y-2z-2)^2$；

⑦$x^2+y^2=1(0\leqslant z\leqslant 1)$，即该直圆柱面夹在 $z=0$ 及 $z=1$ 之间的部分.

9. $x^2+y^2-\alpha^2z^2=\beta^2$，

$\alpha\neq0,\beta\neq0$ 时为旋转单叶双曲面；

$\alpha\neq0,\beta=0$ 时为直圆锥面；

$\alpha=0,\beta\neq0$ 时为直圆柱面；

$\alpha=0,\beta=0$ 时为一直线（z 轴）.

10. $a^2(x^2+y^2)+(b^2-a^2)m^2z^2-a^2b^2=0$.

11. ①椭圆柱面； ②双曲柱面； ③旋转椭球面；

④旋转双叶双曲面； ⑤顶点在原点的二次锥面.

12. ①柱面，母线$/\!/ z$轴，准线为$\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=1, \\ z=0; \end{cases}$

②锥面，顶点在原点，准线为$\begin{cases} (x+1)^2+z^2=4, \\ y=1; \end{cases}$

③旋转曲面，母线为$\begin{cases} x^2-3z^2+2z-1=0, \\ y=0, \end{cases}$绕$z$轴旋转，或母线为$\begin{cases} y^2-3z^2+2z-1=0, \\ x=0, \end{cases}$

绕z轴旋转.

习 题 十 二

1. ①$\begin{cases} y^2=4x, \\ y+z=1; \end{cases}$ ②$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+(y-2)^2=1, \\ z=2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25, \\ 4x-3y=0, \end{cases}$ 圆心为原点，半径为5.

3. $x^2+y^2+z^2=4, x^2+(y-1)^2=1, z^2=-2(y-2)$.

4. $x^2+y^2+z^2-y=0$.

5. ①$x+y=a$； ②$x-4y+2z+1=0$.

6. ①$\begin{cases} x=-\dfrac{t^4}{64}, \\ y=t, \\ z=\dfrac{t^2}{4}; \end{cases}$ ②$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \\ z=\pm\cos\theta. \end{cases}$

7. ①$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，上半球面；

②$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，椭圆柱面；

③$x+y-3z+3=0$，平面.

8. $x^2+y^2=z$，旋转抛物面.

9. $\theta=\theta_0$ 表示直线$\begin{cases} x=a\cos\theta_0, \\ y=a\sin\theta_0, \\ z=v; \end{cases}$ $(-\infty<v<+\infty)$

$v=v_0$ 表示圆$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=v_0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x=(a+b\cos\theta)\cos\varphi, \\ y=(a+b\cos\theta)\sin\varphi, \\ z=b\sin\theta. \end{cases}$ $\left(\begin{matrix} 0\leqslant\theta<2\pi \\ 0\leqslant\varphi<2\pi \end{matrix}\right)$

13. $9-2a\cos\theta=0$.

习 题 十 三

1. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{36}=1$.

2. 半轴长 3 及$\sqrt{3}$，顶点$(2,\pm 3,0)$，$(2,0,\pm\sqrt{3})$.

5. ①$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\\ z=0;\end{cases}$ ②$x=\pm 2$ 及 $y=\pm 3$.

6. $-1<m<1$ 时，交线为双曲线；$m<-1$，或 $m>1$ 时，交线为椭圆.

7. $y=\pm\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2}}z$.

8. $x=\pm 2y$.

9. $m\neq 0$ 时，交线为椭圆；$m=0$ 时，交线为抛物线.

10. $cx+az=0$ 及 $cx-az=0$.

12. $x^2+4y^2-4z^2-4=0$，但应去掉$\begin{cases}y=-1\\ x=-2z,\end{cases}$$\begin{cases}y=1\\ x=2z\end{cases}$和$\begin{cases}x=-2\\ y=z\end{cases}$三条直线.

13. $x^2-\frac{y^2}{2}=2z$.

14. $y^2=4px$，抛物柱面.

15. $x^2-y^2+4z=0$，双曲抛物面.

16. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{3}=1$.

17. $\frac{18}{5}x^2+\frac{3}{5}y^2=z$.

18. ①设定平面为 $z=0$，定点为$(0,0,c)$ $(c\neq 0)$，定比为 λ，则所求轨迹为：$x^2+y^2+(1-\lambda^2)z^2-2cz+c^2=0$.

$\lambda=1$ 时为旋转抛物面；

$0<\lambda<1$ 时为旋转椭圆面；

$\lambda>1$ 时为旋转双叶双曲面.

②$xy\tan\beta=-(1+\tan^2\beta)cz$，双曲抛物面.

21. ①$\lambda>0$，双叶双曲面；$\lambda=0$，二次锥面；$\lambda<0$，单叶双曲面.

③$\lambda>0$，直圆锥面；$\lambda=0$，重合平面；$\lambda<0$，点（虚锥面）.

⑤$\lambda=0$，抛物柱面；$\lambda<0$，双曲柱面；$0<\lambda<1$，椭圆柱面；$\lambda=1$，直线；$\lambda>1$ 虚椭圆柱面.

习 题 十 四

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{4}=1+\dfrac{y}{3},\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{4}=1-\dfrac{y}{3};\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{4}=0,\\ 1-\dfrac{y}{3}=0.\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+y=0,\\ z=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y+2=0,\\ x+y+z=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1-\dfrac{y}{b};\end{cases}$

$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}\right)=1+\dfrac{y}{b}.\end{cases}$

6. $\begin{cases}x^2-y^2=2z,\\ z=0.\end{cases}$

7. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,$

$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2.$

9. $\begin{cases}x=\lambda,\\ \lambda y=z;\end{cases}$ $\begin{cases}y=\mu,\\ \mu x=z.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\lambda(x+z)=\mu y,\\ \mu(x-z)=\lambda y.\end{cases}$

11. $4x^2-9y^2+10x-45y-84z-120=0.$

12. $x^2+y^2-z^2=1$,但要去掉$\begin{cases}x=-1\\ y=z,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1\\ y=-z\end{cases}$和$\dfrac{y}{-3}=\dfrac{y+\frac{5}{3}}{4}=\dfrac{z+\frac{4}{3}}{5}$三条直线.

13. $x^2\tan^2\beta-y^2+(\tan^2\beta-1)z^2=(\tan^2\beta-1)c^2.$

习 题 十 六

5. ①$\lambda=\dfrac{1}{2}(7\pm\sqrt{21})$,对应的特征向量为$k(-3\pm\sqrt{21},2)$;

②$\lambda=2\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$,对应的特征向量为$k(1\mp\sqrt{3}\mathrm{i},1)$;

③$\lambda_1=0$,对应的特征向量为$k(-2,1)$,

$\lambda_2=8$,对应的特征向量为$k(2,3)$;

④$\lambda_1=2$,对应的特征向量为$k(2,1)$,

$\lambda_2=7$,对应的特征向量为 $k(1,-2)$;

⑤$\lambda_1=5$,对应的特征向量为 $k(1,-1)$,

$\lambda_2=-1$,对应的特征向量为 $k(1,1)$;

⑥$\lambda_1=\lambda_2=-1$,对应的特征向量为 $k(1,1,0)+l(3,0,1)$,

$\lambda_3=2$,对应的特征向量为 $k(0,0,1)$;

⑦$\lambda_1=-2$,对应的特征向量为 $k(3,-3,1)$,

$\lambda_2=5$,对应的特征向量为 $k(-13,20,5)$,

$\lambda_3=7$,对应的特征向量为 $k(-3,3,2)$;

⑧$\lambda_1=1$,对应的特征向量为 $k(2,2,-1)$,

$\lambda_2=2$,对应的特征向量为 $k(1,-1,0)$,

$\lambda_3=-8$,对应的特征向量为 $k(1,1,4)$.

6. ①$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & +\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$; ②$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$;

③$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$; ④$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$;

⑤$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3}\\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{pmatrix}$; ⑥$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

习 题 十 七

1. $\left(\frac{1+2\sqrt{3}}{2},\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $y'^2=4x'+2$.

3. $(-1,1)$.

4. $\begin{cases}x'=\frac{1}{5}(4x+3y-17),\\ y'=\frac{1}{5}(-3x+4y-6).\end{cases}$

5. $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2)\operatorname{sign} B_2, \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1)\operatorname{sign} B_1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B}}(Bx-Ay), \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B}}(Ax+By+C). \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{13}(5x+12y-29), \\ y'=\dfrac{1}{13}(-12x+5y+2). \end{cases}$

8. $\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

9. $x^2+2xy+y^2-12x+4y+4=0$.

10. $\begin{cases} x=x'+2, \\ y=y'+2, \\ z=z'-1. \end{cases}$

11. ① $ax'+by'+cz'=0$;

② $\dfrac{x'}{l}=\dfrac{y'}{m}=\dfrac{z'}{n}$;

③ $x'^2+y'^2+z'^2=a^2+b^2+c^2-d$.

12. $\begin{cases} x=x', \\ y=y'\cos\theta-z'\sin\theta, \\ z=y'\sin\theta+z'\cos\theta; \end{cases}$ $\begin{cases} x=z'\sin\theta+x'\cos\theta, \\ y=y', \\ z=z'\cos\theta-x'\sin\theta. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x-z), \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{13}}(3x-10y+6), \\ z'=\dfrac{1}{\sqrt{29}}(2x+3y+4z+5). \end{cases}$

15. $\begin{cases} x'=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z-1), \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-z+1), \\ z'=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-2y+z+2). \end{cases}$

习 题 十 八

1. $\frac{x'^2}{24}-\frac{y'^2}{8}=1$.

2. ①$2x'^2+7y'^2-7=0$；

②$-x'^2+\frac{y'^2}{4}=1$；

③$y'^2+2x'=0$.

3. 当 $c\neq0$ 时用$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y',\end{cases}$消去交叉项 xy.

4. $\begin{cases}x'=\frac{1}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}(A_2x+B_2y+C_2),\\ y'=\frac{1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}(A_1x+B_1y+C_1),\end{cases}$ 椭圆.

5. $x'^2+y'^2-4z'^2=7$,单叶双曲面.

6. $z'=\frac{3}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2$,椭圆抛物面.

7. 绕 x 轴旋转$\frac{\pi}{4}$,$x'^2=\sqrt{2}y'$,抛物柱面.

8. 用变换$(x,y,z)=(x',y',z')\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\ -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$可化为$\frac{x'^2}{8}+\frac{y'^2}{4}-z'^2=1$,单叶双曲面.

习 题 十 九

1. ①椭圆； ②一对平行直线； ③双曲线； ④一对重合直线.

2. ①$I_1=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$,$I_2=\frac{1}{a^2b^2}$,$I_3=\frac{-1}{a^2b^2}$,$K_1=-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$；

③$I_1=1$,$I_2=0$,$I_3=-p^2$,$K_1=-p^2$.

3. ①$\lambda<-1$,椭圆；$\lambda=-1$,抛物线；$-1<\lambda<1$,双曲线；$\lambda=1$,一对重合直线；$\lambda>1$,虚椭圆；

②$\lambda<0$,$\lambda\neq-\frac{1}{2}$,双曲线；$\lambda=-\frac{1}{2}$,一对相交直线；$\lambda=0$,抛物线；$0<\lambda<1$,椭圆；$\lambda=1$,一对重合直线；$\lambda>1$,双曲线.

4. ①$4x^2-9y^2-36=0$,半轴长 3,2；

②$20x^2-5y^2+20=0$,半轴长 2,1;

③$x^2+2\sqrt{2}y=0$,首通径 $2\sqrt{2}$.

6. $\dfrac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$.

7. $k=-1$,$3x+4y-1=0$ 及 $x+1=0$.

习 题 二 十

1. $k=-5\pm2\sqrt{5}$.
2. ①$(-1,1)$; ②$(-1,1)$.
3. $5x-4y-6=0$.
4. $2x-y+2=0$ 及 $x+y-2=0$.
5. 切线:$3x-y=0$,法线:$x+3y-10=0$.
6. ①$I_2=0$,渐近方向$(1,-1)$;

   ②$I_2>0$,$\left(\dfrac{-2+\sqrt{2}\mathrm{i}}{3},1\right)$, $\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}\mathrm{i}}{3},1\right)$;

   ③$I_2<0$,$(1,0)$,$(0,1)$.
7. $(\pm a\mathrm{i},b)$; $(\pm a,b)$; $(0,1)$.
8. $6x+7y+4=0$.
9. ①$(1,1)$; ③$4x+2y-5=0$.
10. ②$2x-y+1=0$,$3x+y=0$.
11. ①$\alpha\neq9$; ②$\alpha=9,\beta\neq9$; ③$\alpha=\beta=9$.

习 题 二 十 一

5. $(x',y')=(x,y)\begin{pmatrix}\dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4}\\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4}\end{pmatrix}+\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2}\right)$.

6. $(x',y')=\dfrac{1}{a_1b_2-a_2b_1}[(x,y)-(c_1,c_2)]\begin{pmatrix}b_2 & -a_2\\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}$.

8. $(x',y')=\dfrac{1}{a^2+b^2}(x,y)\begin{pmatrix}-a^2+b^2 & -2ab\\ -2ab & a^2-b^2\end{pmatrix}-\dfrac{2c}{a^2+b^2}(a,b)$.

习 题 二 十 三

3. ①$(5,-7)$,$(5,2)$,$(19,-18)$;

   ②$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{19}{9}\right)$,$\left(\dfrac{7}{3},\dfrac{20}{9}\right)$,$\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{10}{9}\right)$;

   ③$10x+7y+35=0$;

④$5x-12y+26=0$.

4. $\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+2, \\ y'=-4x+6y+3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x'=\frac{1}{3}x-2y, \\ y'=\frac{1}{3}x+2y. \end{cases}$

6. ①$\begin{cases} x'=x-2, \\ y'=y-4; \end{cases}$ ②$\begin{cases} x'=-y, \\ y'=x. \end{cases}$

7. ①$\begin{cases} x'=x+2, \\ y'=-x-1; \end{cases}$ ②$\begin{cases} x'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}, \\ y'=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-1-\frac{3}{2}\sqrt{2}. \end{cases}$

8. ①$\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y+2c; \end{cases}$ ②$\begin{cases} x'=y, \\ y'=x; \end{cases}$

③$\begin{cases} x'=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}y-\frac{2ac}{a^2+b^2}, \\ y'=-\frac{2ab}{a^2+b^2}x-\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}y-\frac{2bc}{a^2+b^2}. \end{cases}$

习 题 二 十 四

1. $\begin{cases} x'=2x+2y-1, \\ y'=-\frac{3}{2}x-2y+\frac{3}{2}. \end{cases}$

2. ①$\left(-\frac{1}{2},-2\right)$，$x-y-\frac{3}{2}=0$ 及 $4x-y=0$；

②直线 $x+y+1=0$ 上所有点皆为不动点，不变直线为 $x+y+k=0$（k 是任意参数）.

3. $(4,2)$.

4. $2x+y-3=0$.

5. 例如$\begin{cases} x'=-x, \\ y'=-y; \end{cases}$ $\begin{cases} x'=x, \\ y'=-y; \end{cases}$ $\begin{cases} x'=x+1, \\ y'=y+1. \end{cases}$

6. ①$x'^2-(y'-1)^2=12$ 是等轴双曲线；

②$(x'-5)^2=-2(y'-3)$是抛物线；

③$\frac{(x'-1)^2}{9}+\frac{(y'+2)^2}{16}=1$ 是椭圆.

习 题 二 十 五

11. $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$.